京都大学　1982 年　入学試験　理系数学　問題 1

問題

C を $y=x^3-x$ のグラフ，P を原点と異なる C 上の点とする．

1. 点 P における曲線 C の接線は，P と異なる点 Q で交わることを示せ．
2. 曲線 C と線分 PQ で囲まれた部分は，y 軸 $x=0$ によって，どのような面積の比に分けられるか．

解答

1.
点 P の x 座標を t とすると, 点 P の接線の傾きは $3t^2-1$
そしてその接線の式を $y=(3t^2-1)x+c$ とすると
この接線は (t,t^3-t) を通るので
$t^3-t=(3t^2-1)t+c$
が成立するので $c=-2t^3$ となる。
よって接線の式は $y=(3t^2-1)x-2t^3$
C とこの直線の交点は $x^3-x-(3t^2-1)x+2t^3=x^3-3t^2x+2t^3=(x-t)^2(x+2t)=0$ の解である
これにより $x=t$ 以外に $x=-2t$ という解が存在し、P は原点ではないので $t\neq 0$ よって $-2t\neq t$ より P とは異なる点 Q で交わる。
2.
Q の x 座標は $-2t$ なので囲まれた部分の面積は
$\displaystyle\int_{-2t}^{t} x^3-3t^2x+2t^3\,dx$ である。
$x=0$ によってわけると t と $-2t$ は常に符号が異なるので

$\displaystyle\int_{-2t}^{0} x^3-3t^2x+2t^3\,dx$ と $\displaystyle\int_{0}^{t} x^3-3t^2x+2t^3\,dx$ にわけられる。
それぞれの面積を計算すると
$\displaystyle\int_{-2t}^{0} x^3-3t^2x+2t^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3t^2}{2}x^2+2t^3x\right]_{-2t}^{0}=6t^4$
$\displaystyle\int_{0}^{t} x^3-3t^2x+2t^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3t^2}{2}x^2+2t^3x\right]_{0}^{t}=\frac{3t^4}{4}$
したがって面積は P の側の面積を S_P,Q の側の面積を S_Q とすると

$$S_P:S_Q=1:8$$

証明終了