京都大学　1982 年　入学試験　理系数学　問題 3

問題

平面上に四辺形 ABCD があって，どの頂点も，残りの頂点の作る三角形の外部にある．△BCD の重心を A_1，△CDA の重心を B_1，△DAB の重心を C_1，△ABC の重心を D_1 として，四辺形 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$ を作る．これを 1 回目とし，同様の手続きをくり返して，n 回目に得られる四辺形を $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ とする．

このとき，次のことを示せ．

1. 線分 AA_1，BB_1，CC_1，DD_1 は 1 点 P を共有する．
2. 点 A_n（$n = 1$，2，3，$\cdots$）は 1 直線上にある．
3. A_n と P との距離 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{P}}$ について，$\lim_{n\to\infty} \overline{\mathrm{A}_n\mathrm{P}} = 0$ である．

解答

適当な点 O をとってそこから点 X へのベクトルを $\overrightarrow{x}$ とする。
線分 AA_1 は $t_a\overrightarrow{a} + (1-t_a)\overrightarrow{a_1}\ (0 \leqq t_a \leqq 1)$ と表すことができる。
他の線分も同様。
1.
$\overrightarrow{a_1} = \dfrac{\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}}{3}$ より
線分 AA_1 は $t_a\overrightarrow{a} + \dfrac{(1-t_a)(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d})}{3}\ (0 \leqq t_x \leqq 1)$ と表せるので
$t_a = \dfrac{1}{4}$ の時の点を P とすると
$\overrightarrow{p} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d})$
となり、他の線分も同様になる。
よって他の線分は 1 点 P を共有する。

2.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{a_n} &= \frac{\overrightarrow{b_{n-1}} + \overrightarrow{c_{n-1}} + \overrightarrow{d_{n-1}}}{3} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a_{n-2}} + \overrightarrow{c_{n-2}} + \overrightarrow{d_{n-2}}\right) + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a_{n-2}} + \overrightarrow{b_{n-2}} + \overrightarrow{d_{n-2}}\right) + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a_{n-2}} + \overrightarrow{b_{n-2}} + \overrightarrow{c_{n-2}}\right) + \right) \\
&= \frac{1}{9}\left(3\overrightarrow{a_{n-2}} + 2\overrightarrow{b_{n-2}} + 2\overrightarrow{c_{n-2}} + 2\overrightarrow{d_{n-2}}\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(3\overrightarrow{a_{n-2}} + 6\overrightarrow{a_{n-1}}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a_{n-2}} + 2\overrightarrow{a_{n-1}}\right)
\end{aligned}
$$

以上より A を A_0 とすると $n \geqq 2$ のとき A_n は線分 $\mathrm{A}_{n-2}\mathrm{A}_{n-1}$ 上にある。
$n \geqq 2$ ならば A_n は線分 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1$ 上にあるので
点 A_n は 1 直線上にある。
3.
P_n を $\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, \mathrm{C}_n, \mathrm{D}_n$ 重心とすると
$\overrightarrow{p_n} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{a_n} + \overrightarrow{b_n} + \overrightarrow{c_n} + \overrightarrow{d_n}\right)$ となる。

$\overrightarrow{a_n} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{b_{n-1}} + \overrightarrow{c_{n-1}} + \overrightarrow{d_{n-1}}\right)$
$\overrightarrow{b_n} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a_{n-1}} + \overrightarrow{c_{n-1}} + \overrightarrow{d_{n-1}}\right)$
$\overrightarrow{c_n} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a_{n-1}} + \overrightarrow{b_{n-1}} + \overrightarrow{d_{n-1}}\right)$
$\overrightarrow{d_n} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a_{n-1}} + \overrightarrow{b_{n-1}} + \overrightarrow{c_{n-1}}\right)$
より

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{p_n} &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{b_{n-1}} + \overrightarrow{c_{n-1}} + \overrightarrow{d_{n-1}}\right) + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a_{n-1}} + \overrightarrow{c_{n-1}} + \overrightarrow{d_{n-1}}\right) + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a_{n-1}} + \overrightarrow{b_{n-1}} + \overrightarrow{d_{n-1}}\right) + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a_{n-1}} + \overrightarrow{b_{n-1}} + \overrightarrow{c_{n-1}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{12}(3a_{n-1} + 3b_{n-1} + 3c_{n-1} + 3d_{n-1}) \\
&= \frac{1}{4}(a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1}) \\
&= \overrightarrow{p_{n-1}}
\end{aligned}$$

となり P_n と P_{n-1} は等しい。

よって $\mathrm{P}_n = \mathrm{P}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{p} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{a_{n-1}} + \overrightarrow{b_{n-1}} + \overrightarrow{c_{n-1}} + \overrightarrow{d_{n-1}}) \\
&= \frac{1}{4}(\overrightarrow{a_{n-1}} + 3\overrightarrow{a_n}) \\
&= \frac{1}{4}\overrightarrow{a_{n-1}} + \frac{3}{4}\overrightarrow{a_n}
\end{aligned}$$

より点 P は A_n と A_{n-1} の線分上にある。
$\overrightarrow{a_n} = \frac{1}{3}\overrightarrow{a_{n-2}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{a_{n-1}}$ より
$\overrightarrow{a_n} - \overrightarrow{a_{n-1}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a_{n-2}} - \frac{1}{3}\overrightarrow{a_{n-1}})$
$|\overrightarrow{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{A}_{n-2}\mathrm{A}_{n-1}}|$
となり線分 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$ の長さは線分 $\mathrm{A}_{n-2}\mathrm{A}_{n-1}$ の長さの $\frac{1}{3}$
よって線分 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$ の長さを l_n とすると
$l_n = \frac{1}{3}l_{n-1}$
よって $l_1 = l$ とすると
$l_n = \frac{1}{3^{n-1}}l$
点 P は常に線分 $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n$ 上にあるので $\overline{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n} > \overline{\mathrm{A}_n\mathrm{P}}$
$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n-1}}l = 0$ より

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\mathrm{A}_n\mathrm{P}} = 0$$

証明終了