京都大学　1982 年　入学試験　理系数学　問題 5

問題

校庭に，南北の方向に 1 本の白線が引いてある．ある人が，白線上の点 A から西へ 5 メートルの点に立ち，銅貨を投げて，表が出たときは東へ 1 メートル進み，裏が出たときは北へ 1 メートル進む．白線に達するまで，これを続ける．

1. A 点から n メートル北の点に達する確率 p_n を求めよ．
2. p_n を最大にする n を求めよ．

解答

スタートする点を $(0,0)$ とし、東に x メートル、北に y メートルの点を (x,y) と表す。すると、A 点から北に n メートルの点は $(5,n)$ となる。この点 $(5,n)$ を P_n とする。
$(5,n-1)$ の点に到達したときにはその時点で終了するので点 P_n に到達するためには、その直前に $(4,n)$ の点にいなければならない。
また P_n に到達するためには、それまでのに $5+n$ 回硬貨を投げなければならないので結果、P_n に到達するためには $n+4$ 回の投げて $(4,n)$ に到達し、次に投げた硬貨が表になる必要がある。
よって p_n は $n+4$ 回なげて、表が 4 回出る確率にもう一度表が出る確率をかけたものとなる。
したがって
$p_n = \frac{{}_{n+4}C_4}{2^{5+n}} = \frac{(n+4)!}{4!n!2^{5+n}} = \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{3*2^{8+n}}$
となる。

$$p_n = \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{3\cdot 2^{n+8}}$$

2.

$$\begin{aligned} p_n - p_{n-1} &= \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{3\cdot 2^{8+n}} - \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{3\cdot 2^{7+n}} \\ &= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3\cdot 2^{n+7}}(\frac{(n+4)}{2} - n) \\ &= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3\cdot 2^{n+8}}(4-n) \end{aligned}$$

となり
$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3\cdot 2^{n+8}}$ は常に正なので
$n<4$ のとき $p_n > p_{n-1}$
$n=4$ のとき $p_n = p_{n-1}$
$n>4$ のとき $p_n < p_{n-1}$
よって p_n は n が 0 から 3 までは増加し
$p_4 = p_3$ となり
n が 4 より大きいときは減少する。
したがって p_n が最大となるのは $n=3,4$ のとき

$$p=3, p=4$$

証明終了