京都大学　1982 年　入学試験　理系数学　問題 6

問題

関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1} te^{-|t|}\,dt$ について，次の問に答えよ．

1. $-1 \leqq x \leqq 0$ のとき，$f(-1) \leqq f(x) \leqq f(0)$ であることを示せ．
2. $f(x)$ が最大および最小となる x の値をそれぞれ求めよ．

解答

$g(x)=xe^{-|x|}$ とすると
$x>0$ の範囲で $g(x)=xe^{-x}$
$x<0$ の範囲で $g(x)=xe^{x}$
$x>0$ のとき
$\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt=\int_0^x te^{-t}\,dt=\Big[-(t+1)e^{-t}\Big]_0^x=-(x+1)e^{-x}+e^0=1-(x+1)e^{-x}$
$x<0$ のとき
$\displaystyle\int_x^0 g(t)\,dt=\int_0^x te^{t}\,dt=\Big[(t-1)e^{t}\Big]_0^x=-e^{-0}-(x-1)e^{x}=-(x-1)e^x-1$
よって $x \leqq -1$ の範囲では $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1} te^{t}\,dt=(ex-x+1)e^x$
$-1 \leqq x \leqq 0$ の範囲では
$f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1} te^{-|t|}\,dt=\int_x^0 te^(t)\,dt+\int_0^{x+1} te^(-t)\,dt=-(x-1)e^x-(x+2)e^{-x-1}$
$x \geqq 0$ の範囲では $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1} te^{t}\,dt=-(x+2)e^{-x-1}+(x+1)e^{-x}$
$f(-1),f(0)$ はそれぞれの両側の式で計算してもおなじ値となるのでこの関数は連続

1.
$-1 \leqq x \leqq 0$ の範囲では
$f'(x)=-e^{-x-1}(xe^{2x+1}-x-1)$
$x \leqq 0$ より $xe^{2x+1} \leqq 0$
$-1 \leqq x$ より $x+1>0$ なので $-x-1<0$
よって $xe^{2x+1}-x-1<0$
したがって $f'(x) \geqq 0$
以上より $f(x)$ はこの範囲で単調増加
したがって $f(-1) \leqq f(x) \leqq f(0)$

2.
$x>0$ の範囲で
$f'(x)=-(ex-x-1)e^{-x-1}$ より
$x<\dfrac{1}{e-1}$ で $f'(x)>0$
$x=\dfrac{1}{e-1}$ で 0
$x>\dfrac{1}{e-1}$ で $f'(x)<0$
$x>0$ の範囲では $x=\dfrac{1}{e-1}$ で最大となる。

$x < -1$ の範囲では

$f'(x) = (ex - x + e)e^x$

$x < -\dfrac{e}{e-1}$ の範囲で $f'(x) < 0$

$x = -\dfrac{e}{e-1}$ の範囲で $f'(x) = 0$

$x > -\dfrac{e}{e-1}$ の範囲で $f'(x) > 0$

となり $x = -\dfrac{e}{e-1}$ で最小となる。

以上より

各範囲の最小値を比較すると

$x \leqq -1$ では $f(-\dfrac{e}{e-1})$

$-1 \leqq x \leqq 0$ では $f(-1)$

$x > 0$ では $e-1 > 0, e-2 > 0$ より $x(e-1) + e - 2 > 0$ なので $f(x) = (ex - x + e - 2)e^{-x-1} > 0$

したがって $f(x)$ の最小値は正

$e\dfrac{-e}{e-1} - \dfrac{-e}{e-1} + 1 = -e + 1 < 0$ より $f(-\dfrac{e}{e-1}) < 0$

よって $x = -\dfrac{e}{e-1}$ で最小値をとる。

同様に最大値を比較すると

$x \leqq -1$ では $f(x) < 0$

より最大値は負

$-1 \leqq x \leqq 0$ では $f(0)$

$x > 0$ では $f(\dfrac{1}{e-1})$ で最大

よって $x = \dfrac{1}{e-1}$ で最大値をとる。

以上より

最大値をとる x の値は $x = \dfrac{1}{e-1}$

最小値をとる x の値は $x = -\dfrac{e}{e-1}$

証明終了