京都大学　1983年　入学試験　文系数学　問題1

問題

数直線上を原点から右（正の向きに）硬貨を投げて進む．表が出れば 1 進み，裏が出れば 2 進むものとする．このようにして，ちょうど点 n に到達する確率を p_n で表す．ただし，n は自然数とする．

1. 3 以上の n について，p_n と p_{n-1}，p_{n-2} との関係式を求めよ．
2. p_n（$n \geqq 3$）を求めよ．

解答

1.
n に到達するためには直前に $n-1$ に到達していて表がでる場合と直前に $n-2$ に到達していて裏が出る場合のどちらかが成立しなければならない。
$n-2$ で裏がでてしまうと決して $n-1$ には到達しないのでこの事象は排他である。
よって $p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-2}$
2.
逆の事象を考えると $n-1$ に到達して裏が出る場合なので $p_n = 1 - \frac{1}{2}p_{n-1}$ 両辺から $\frac{2}{3}$ を引くと
$p_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}(p_{n-1} - \frac{2}{3})$ より
$a_n = p_n - \frac{2}{3}$ とすると
$a_n = \frac{1}{(-2)^n}a_0$
$p_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{(-2)^n}\frac{1}{3}$
よって

$$p_n = \frac{1}{3}(\frac{1}{(-2)^n} + 2)$$

証明終了