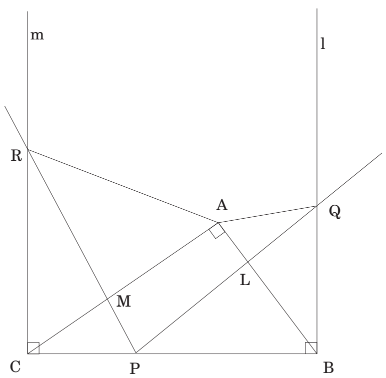
京都大学　1983 年　入学試験　文系数学　問題 2

## 問題

$\angle A = 90^\circ$ である直角三角形 ABC がある．頂点 B，C をそれぞれ始点として，辺 BC に垂直な半直線 $l$，$m$ を頂点 A のある側にひく．次に辺 BC 上の任意の点 P より辺 AB，AC に垂線をひき，この延長が $l$，$m$ と交わる点をそれぞれ Q，R とする．

1. 3 点 Q，A，R は一直線上にあることを示せ．
2. 台形 BCRQ の面積が三角形 ABC の面積の 2 倍になるとき，この台形の形を求めよ．ただし，$AB \neq AC$ とする．

## 解答




1.
AB と PQ は直交するので AB と PQ の交点を L とすると $\angle ALP = 90^\circ$
同様に AC と PR の交点を M とすると $\angle AMP = 90^\circ$
したがって四辺形 ALPM は長方形となり AC//PQ,AB//PR
AB//RP より $\angle ABC = \angle RPC$
よって $\triangle ABC$ と $\triangle CPR$ は相似
点 A から BC に降ろした垂線の足を H とすると
$\angle CMP = 90^\circ$ より $BH : HC = PM : MR$
RA を延長した線と PQ の交点を S とすると
CA//PQ より $RS : SQ = RM : MP$
以上より
$CH : HB = RM : MP = RA : AS$
RC//AH より BS//CR
RC//QB なので BS//QB
1 点を共有する平行線は同一なので、点 S は QB 上の点
しかし、点 S は PQ 上の点なので、点 S は l と PQ の交点
平行でない 2 直線の交点は 1 点なので、Q と S は同一の点
したがって、点 Q は RA の延長上にあり、RAQ は一直線上にある。

2.
台形 BCRQ の面積は $\dfrac{1}{2}(BQ + CR)BC$

三角形 ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\mathrm{AH}\cdot\mathrm{BC}$

よって BCRQ の面積が ABC の面積の 2 倍になるということは $\dfrac{1}{2}(\mathrm{BQ}+\mathrm{CR})\mathrm{BC} = 2\dfrac{1}{2}\mathrm{AH}\cdot\mathrm{BC}$

となるので

$\dfrac{1}{2}(\mathrm{BQ}+\mathrm{CR}) = \mathrm{AH}$

とならなければならない。

$\mathrm{BH}:\mathrm{HC} = u:v$ とする

A は PQ 上にあり AH は BQ に平行なので

したがって $\mathrm{AH} = \dfrac{1}{u+v}(u\mathrm{CR}+v\mathrm{BQ})$ となる。

これが $\dfrac{1}{2}(\mathrm{BQ}+\mathrm{CR})$ と一致するので

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u+v}(u\mathrm{CR}+v\mathrm{BQ}) &= \frac{1}{2}(\mathrm{BQ}+\mathrm{CR}) \\
2u\mathrm{CR}+2v\mathrm{BQ}) &= ((u+v)\mathrm{BQ}+(u+v)\mathrm{CR}) \\
(u-v)\mathrm{CR} &= (u-v)\mathrm{BQ}
\end{aligned}$$

$u = v$ だった場合 BH=HC となり $\triangle$AHB と $\triangle$AHC は 2 辺とその間の角が等しい三角形なので合同となり

$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ となるがこれは前提に反するので $u \neq v$

したがって $u - v \neq 0$ なので両辺を $u - v$ で割ると

$\mathrm{CR} = \mathrm{BQ}$

以上よりこのときの台形の形は長方形

証明終了