京都大学　1983 年　入学試験　文系数学　問題 3

問題

$ab+cd=0$, $ad-bc\neq 0$ を満たす実数 a, b, c, d のつくる行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ がある．ただし，a, c は負でないとする．

1. $A=\begin{pmatrix} v\cos\theta & -v\sin\theta \\ v\sin\theta & v\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$ と表されることを示せ．ただし，u, v, θ は実数で，$v>0$, $0\leqq\theta<2\pi$ とする．
2. O を原点とする座標平面上の 1 次変換 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ について，長さ 1 のベクトル $\vec{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ から，ベクトル $\vec{\mathrm{OP}}'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ への角度を γ（$-\pi<\gamma\leqq\pi$）とする（したがって，半直線 OP を角度 γ だけ回転すれば半直線 OP' となる）．(x,y) が $x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $x^2+y^2=1$ の範囲を動いたとき，γ を最大にする $\vec{\mathrm{OP}}$ を求めよ．ただし，$0<u<1$ とする．

解答

1.
$a=0$ ならば $ab=0$ より $cd=0$
よって c,d のいずれかがとなる。
$c=0$ とすると $ad-bc=0$ となって条件に反するので $d=0$ なので
$A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ となる。
ここで $\theta=\dfrac{\pi}{2}, v=c, u=-\dfrac{b}{c}$ とすると
$A=\begin{pmatrix} v\cos\theta & -v\sin\theta \\ v\sin\theta & v\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v\cos\theta & -uv\sin\theta \\ v\sin\theta & uv\cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ となり、表すことができる。

$a\neq 0$ の場合を考える。
$ab+cd=0$ より $b=0$ ならば $ab=0$ より $c=0$ または $d=0$ なので
$d=0$ とすると $ad-bc=0$ なり条件に反するので $c=0$
よって $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ と表せる。
ここで $\theta=0, v=a, u=\dfrac{d}{a}$ とすると
$\begin{pmatrix} v\cos\theta & -v\sin\theta \\ v\sin\theta & v\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v\cos\theta & -uv\sin\theta \\ v\sin\theta & uv\cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}=A$ となり
表すことができる。
$a\neq 0, b\neq 0$ の時を考える。
$ab\neq 0$ なので $cd\neq 0$ よって $c\neq 0, d\neq 0$
このとき $\tan\theta=\dfrac{c}{a}$ となる θ をとることができる。
θ をこのような値だとすると $t=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$ として
$a=t\cos\theta$
$c=t\sin\theta$

と表すことができる。

$ab+cd=0$ より

$ab=-cd$

$a\neq 0, d\neq 0$ なので

$\frac{b}{d}=-\frac{c}{a}$

よって $\frac{b}{d}=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$s=\frac{1}{\sqrt{b^2+d^2}}$ とすると

$b=-s\sin\theta$

$d=s\cos\theta$ となる。

$v=t, u=\frac{s}{t}$ とすると

$$\begin{pmatrix} v\cos\theta & -v\sin\theta \\ v\sin\theta & v\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v\cos\theta & -uv\sin\theta \\ v\sin\theta & uv\cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t\cos\theta & -s\sin\theta \\ t\sin\theta & s\cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=A$$

となり、表すことができる。

2.

$A=\begin{pmatrix} v\cos\theta & -v\sin\theta \\ v\sin\theta & v\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$ なので

この操作は P を y 軸方向に u 倍し θ 回転し、v 倍することになる。

$x\geqq 0, y\geqq 0$ でかつ $0<u<1$ なので始めの操作は y 軸方向の縮小をすることになり

OP と x 軸の角を α とし OP と x 軸の正の部分との角を β とすると

$\alpha\geqq\beta\geqq 0$ となる。

$\gamma=\beta+\theta-\alpha$ なので

$\theta>0$ の場合

$\beta-\alpha\leqq 0$ より $\gamma\leqq\theta$ となる。

したがって θ は一定なので γ が大きくなるためには $\beta-\alpha$ が 0 になればいい。

y 軸方向の縮小によって角度が変化しないためには $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が x 軸または y 軸に一致すればいい

よって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が $(1,0),(0,1)$ のとき

$\theta\leqq 0$ の場合 $\gamma=\theta+\beta-\alpha<0$ となりこれが最大となるのは $\beta=\alpha$ のとき

同様に $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が $(1,0),(0,1)$ のとき

証明終了