京都大学　1983年　入学試験　文系数学　問題4

問題

3つのベクトル $\vec{\mathrm{OA}}$，$\vec{\mathrm{OB}}$，$\vec{\mathrm{OC}}$ はたがいに直交している．点Oより直線BC，CA，ABに垂線をひき，その交点をそれぞれP，Q，Rとする．

1. 四面体OPQRの四面体OABCに対する体積比を，$\vec{\mathrm{OA}}$，$\vec{\mathrm{OB}}$，$\vec{\mathrm{OC}}$ の長さ a，b，c で表せ．
2. 四面体OPQRの体積は四面体OABCの体積の $\dfrac{1}{4}$ 以下であることを示せ．

解答

PQRはそれぞれBC,CA,AB上の点なので平面ABC上の点
したがってPQRを底面としたときの四面体OPQRの高さはABCを底面としたきの四面体OABCの高さと一致する。
四面体は三角錐なのでその体積は底面の面積 S, 高さを h とすると $\dfrac{1}{3}Sh$ なので
四面体OQPRと四面体OABCの体積の比は三角形PQRと三角形ABCの面積の比に一致する。

Oを原点とし、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を x 軸、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を y 軸、$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を z 軸、となるような座標系をとるとA,B,Cの座標はそれぞれ $(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)$ となる。Rの座標は $y=-\dfrac{b}{a}x+b$ と $y=\dfrac{a}{b}x$ の交点なので
$(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2},\dfrac{a^2b}{a^2+b^2},0)$
同様に
Qの座標は $(\dfrac{c^2a}{c^2+a^2},0,\dfrac{ca^2}{c^2+a^2})$
Pの座標は $(0,\dfrac{b^2c}{b^2+c^2},\dfrac{bc^2}{b^2+c^2})$
点PはBC上の点なので $s\overrightarrow{b}+(1-s)\overrightarrow{c}=\overrightarrow{p}$ となる s が存在する
したがって $s(0,b,0)+(1-s)(0,0,c)=(0,\dfrac{bc^2}{b^2+c^2},\dfrac{b^2c}{b^2+c^2})$ となり
$sb=\dfrac{bc^2}{b^2+c^2}$ であるので、
$s=\dfrac{c^2}{b^2+c^2}$、$(1-s)=\dfrac{b^2}{b^2+c^2}$ となる
同様に
$t\overrightarrow{c}+(1-t)\overrightarrow{a}=\overrightarrow{q}$ となる t は
$t=\dfrac{a^2}{a^2+c^2}$
$u\overrightarrow{b}+(1-u)\overrightarrow{c}=\overrightarrow{r}$ となる u は
$u=\dfrac{b^2}{a^2+b^2}$
以上より
$BP:PC=b^2:c^2$
$AQ:QC=a^2:c^2$
$AR:RB=a^2:b^2$
ここで三角形AQRを考える。
三角形ABCと三角形AQBは底辺の比がAC : AQで高さが等しい三角形なので面積比は底辺の比に等しい。
同様に三角形AQBと三角形ARQの面積比はAB : ARに等しいので
三角形AQRと三角形ABCの面積比は $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AB}}$ と $\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AC}}$ の積になる。

したがって三角形 AQR の面積は $S\dfrac{a^2}{a^2+b^2}\dfrac{a^2}{a^2+c^2}$
同様に
三角形 BPR の面積は $S\dfrac{b^2}{a^2+b^2}\dfrac{b^2}{b^2+c^2}$
三角形 CQP の面積は $S\dfrac{c^2}{a^2+c^2}\dfrac{c^2}{b^2+c^2}$
となる。
三角形 PQR の面積は三角形 ABC から AQR,BPR,CQR を引いたものなので

$$\begin{aligned}
T &= S\left(1-(\frac{a^2}{a^2+b^2}\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}\frac{b^2}{b^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}\frac{c^2}{b^2+c^2})\right)\\
&= S\left(\frac{2a^2b^2c^2}{(b^2+a^2)(c^2+a^2)(c^2+b^2)}\right)
\end{aligned}$$

四面体 OABC の体積と四面体 OPQR の体積の比は上述の通り面積比と等しいので

$$\frac{2a^2b^2c^2}{(b^2+a^2)(c^2+a^2)(c^2+b^2)}$$

2.
相加平均 $\geqq$ 相乗平均より
$\dfrac{b^2c^4+a^2c^4+b^4c^2+a^4c^2+a^2b^4+a^4b^2}{6} \geqq \sqrt[6]{a^{12}b^{12}c^{12}}$
a, b, c のうち一つでも 0 であると四面体を構成できないのですべて 0 ではない。
よって $(b^2+a^2)(c^2+a^2)(c^2+b^2) > 0$

$$\begin{aligned}
(b^2+a^2)(c^2+a^2)(c^2+b^2)-2a^2b^2c^2 &\geqq 6a^2b^2c^2\\
(b^2+a^2)(c^2+a^2)(c^2+b^2) &\geqq 8a^2b^2c^2\\
\frac{8a^2b^2c^2}{(b^2+a^2)(c^2+a^2)(c^2+b^2)} &\leqq 1\\
\frac{2a^2b^2c^2}{(b^2+a^2)(c^2+a^2)(c^2+b^2)} &\leqq \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

よって、体積比は $\dfrac{1}{4}$ 以下
証明終了