京都大学　1983 年　入学試験　文系数学　問題 5

問題

$f(x)$ は x の整式で，$f(0)=f'(0)=0$，$f''(x)=2(1-x)$ を満たすとする（$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す）．

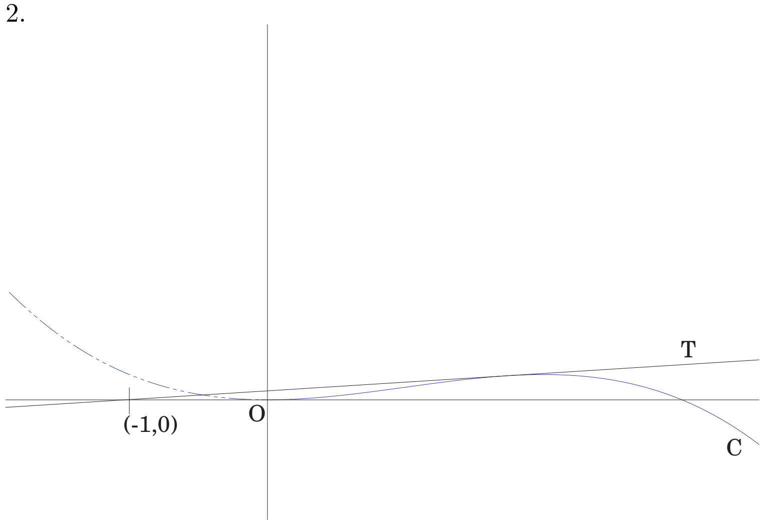
1. $f(x)$ を求めよ．
2. $y=f(x)$ のグラフの $x \geqq 0$ の部分を C とする．また，点 $(-1,0)$ を通る C の接線で傾きが 0 でないものを T とする．このとき，x 軸の負の部分と，C，T とで囲まれた領域の面積を求めよ．

解答

1.
$f''(x)=2(1-x)$ より
$f'(x)=2x-x^2+c$
$f'(0)=0$ より $f'(x)=2x-x^2$
$f(x)=x^2-\frac{1}{3}x^3+c$
$f(0)=0$ より

$$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2$$

2.



$f(x)$ の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式を $y=ax+b$ とすると $a=f'(t)$ で、$f(t)=f'(t)t+b$ となる。
よって

$$\begin{aligned} b &= f(t)-f'(t)t \\ &= -\frac{1}{3}t^3+t^2-(2t-t^2)t \\ &= \frac{2}{3}t^3-t^2 \end{aligned}$$

この接線が $(-1,0)$ を通過するので
$0=f'(t)(-1)+b=-(2t-t^2)+\frac{2}{3}t^3-t^2=\frac{2t}{3}(t^2-3)$ $t=0$ ならば、$f'(0)=0$ より傾きが 0 になるので
$t \neq 0$ より $t=\pm\sqrt{3}$
したがって $a=f'(\pm\sqrt{3})=\pm 2\sqrt{3}-3$
C は $x \geqq 0$ の部分なので接点の x 座標は正

よって $t = \sqrt{3}$
$a = 2\sqrt{3} - 3$ より
C と T の交点は

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{3}x^3 + x^2 &= (2\sqrt{3} - 3)(x + 1) \\
-x^3 + 3x^2 &= 3(2\sqrt{3} - 3)(x + 1) \\
0 &= x^3 - 3x^2 + 3(2\sqrt{3} - 3)x + 3(2\sqrt{3} - 3) \\
0 &= x^3 - 3x^2 + 3(2\sqrt{3} - 3)x + 3(2\sqrt{3} - 3) \\
0 &= -\frac{1}{3}(x - \sqrt{3})^2(x + 2\sqrt{3} - 3)
\end{aligned}$$

C は $x \geqq 0$ の範囲なので C,T,x 軸の負の部分とで囲まれる部分の面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{0} (2\sqrt{3} - 3)(x + 1)\,dx + \int_{0}^{\sqrt{3}} (2\sqrt{3} - 3)(x + 1) - (-\frac{1}{3}x^3 + x^2)\,dx \\
&= \left[(2\sqrt{3} - 3)(\frac{1}{2}x^2 + x)\right]_{-1}^{0} + \left[(2\sqrt{3} - 3)(\frac{1}{2}x^2 + 1) - (-\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3)\right]_{0}^{\sqrt{3}} \\
&= -(2\sqrt{3} - 3)(\frac{1}{2} - 1) + (2\sqrt{3} - 3)(\frac{1}{2}3 + \sqrt{3}) - (-\frac{1}{12}9 + \frac{1}{3}3\sqrt{3}) \\
&= \sqrt{3} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(2\sqrt{3} - 3)(3 + 2\sqrt{3}) + \frac{3}{4} - \sqrt{3} \\
&= \sqrt{3} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \sqrt{3} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

以上より面積は

$$\frac{3}{4}$$

証明終了