京都大学　1983 年　入学試験　理系数学　問題 1

問題

A，B，C の 3 高校が野球の試合をする．まず 2 校が対戦して，勝った方が残りの 1 校と対戦する．これをくりかえして，2 連勝した高校が優勝する．A 校が B，C 校に勝つ確率をそれぞれ p，q とし，B 校が C 校に勝つ確率を $\dfrac{1}{2}$ とする．次の確率を，それぞれ求めよ．ただし，$0 < p < 1$，$0 < q < 1$ とする．

1. 第 1 戦に A 校と B 校が対戦した場合，A 校が B 校に勝って優勝する確率.
2. 第 1 戦に A 校と B 校が対戦した場合，A 校が B 校に負けて優勝する確率.
3. 第 1 戦に B 校と C 校が対戦した場合，A 校が優勝する確率.

解答

1.
第 1 戦に A 校と B 校が対戦した場合
A 校が勝つ確率は p、次に対戦するのは C 校で勝つ確率は q なので
A 校が 2 回対戦して優勝する確率は q
２戦で A 校が負けた場合、３回戦で C 校は B 校と戦い、C 校が勝つと C 校の優勝が決まるので A 校が優勝するためには、B 校が勝たねばならない。ここまでの確率は $p(1-q)\dfrac{1}{2}$
４戦は A 校対 B 校となり、A 校が勝つ必要がある。したがって、第 1 戦と同様となりこれ以降はおなじよって、第 1 戦に A 校が勝って優勝する確率 P は第 n 戦で A 校が優勝を決める確率を a_n とすると

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0 \\
a_2 &= q \\
a_3 &= 0 \\
a_4 &= 0 \\
a_5 &= (1-q)\frac{1}{2}pq \\
a_6 &= 0 \\
a_7 &= 0 \\
a_8 &= (1-q)\frac{1}{2}p(1-q)\frac{1}{2}pq \\
a_9 &= 0 \\
a_{10} &= 0 \\
a_{11} &= (1-q)\frac{1}{2}p(1-q)\frac{1}{2}p(1-q)\frac{1}{2}pq \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

となる。

したがって A 校が優勝する確率 W_b とするとは

$$
\begin{aligned}
W_b &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \\
&= q + (1-q)\frac{1}{2}pq + (1-q)\frac{1}{2}p(1-q)\frac{1}{2}pq + (1-q)\frac{1}{2}p(1-q)\frac{1}{2}p(1-q)\frac{1}{2}pq + \cdots \\
&= q + ((1-q)\frac{1}{2}p)q + ((1-q)\frac{1}{2}p)^2 q + ((1-q)\frac{1}{2}p)^3 q + \cdots \\
&= q(1 + ((1-q)\frac{1}{2}p) + ((1-q)\frac{1}{2}p)^2 + ((1-q)\frac{1}{2}p)^3 + \cdots) \\
&= q\sum_{l=0}^{\infty}((1-q)\frac{1}{2}p)^l \\
&= \frac{q}{1-((1-q)\frac{1}{2}p)} \\
&= \frac{2q}{2-(1-q)p}
\end{aligned}
$$

2.

第 1 戦に A 校が B 校に負けた場合

第 2 戦で B 校が C 校に負けて

第 3 戦で A 校が C 校に勝ち

第 4 戦で A 校が B 校に勝てば優勝が決まる。

第 n 戦で A 校が優勝を決める確率を a_n とすると

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0 \\
a_2 &= 0 \\
a_3 &= 0 \\
a_4 &= \frac{1}{2}qp \\
a_5 &= 0 \\
a_6 &= 0 \\
a_7 &= \frac{1}{2}q(1-p)\frac{1}{2}qp \\
a_8 &= 0 \\
a_9 &= 0 \\
a_{10} &= \frac{1}{2}q(1-p)\frac{1}{2}q(1-p)\frac{1}{2}qp \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

A 校が優勝する確率 L_b とすると

$$
\begin{aligned}
L_b &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \\
&= \frac{1}{2}qp + \frac{1}{2}q(1-p)\frac{1}{2}qp + \frac{1}{2}q(1-p)\frac{1}{2}q(1-p)\frac{1}{2}qp + \cdots \\
&= \frac{1}{2}qp + (\frac{1}{2}q(1-p))\frac{1}{2}qp + (\frac{1}{2}q(1-p))^2\frac{1}{2}qp + \cdots \\
&= \frac{1}{2}qp\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}q(1-p)\right)^l \\
&= \frac{1}{2}qp\frac{1}{1-(\frac{1}{2}q(1-p))} \\
&= \frac{qp}{2-q(1-p)}
\end{aligned}
$$

3.

第 1 戦が B 校対 C 校だった場合

A が最初の対戦で B に勝って優勝する確率を W_b

C に勝って優勝する確率を W_c

B に負けて優勝する確率を L_b

C に負けて優勝する確率を L_c

とすると

第 1 戦で B が勝つ確率に、第 2 戦で A が B に勝つ確率 p と A が B に勝った場合に優勝する確率 W_b をかけたものと

第 1 戦で B が勝つ確率に、第 2 戦で A が B に負ける確率 $1-p$ と A が B に負けた場合に優勝する確率 L_b をかけたものと

第 1 戦で C が勝つ確率に、第 2 戦で A が勝つ確率 q と A が C に勝った場合に優勝する確率 W_c をかけたものと

第 1 戦で C が勝つ確率に、第 2 戦で A が負ける確率 $1-q$ と A が C に負けた場合に優勝する確率 L_c をかけたもの

を加えたものが A 校が優勝する確率となる

よって

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2}p\frac{2q}{2-(1-q)p} + \frac{1}{2}(1-p)\frac{qp}{2-q(1-p)} + \frac{1}{2}q\frac{2p}{2-(1-p)q} + \frac{1}{2}(1-q)\frac{pq}{2-p(1-q)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2pq}{2-p(1-q)} + \frac{pq}{2-p(1-q)} - \frac{pq^2}{2-p(1-q)} + \frac{qp}{2-q(1-p)} - \frac{qp^2}{2-q(1-p)} + \frac{2pq}{2-q(1-p)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(3-q)pq}{2-p(1-q)} + \frac{(3-p)qp}{2-q(1-p)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(3-q)pq}{2-p(1-q)} + \frac{(3-p)qp}{2-q(1-p)}\right)
\end{aligned}
$$

証明終了