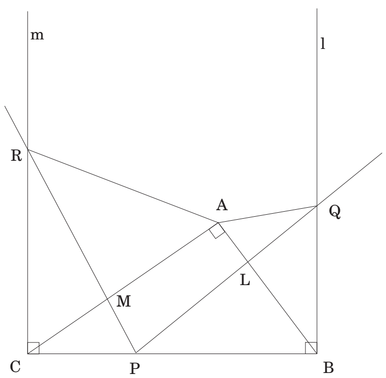
京都大学　1983 年　入学試験　理系数学　問題 2

問題

$\angle A = 90^\circ$ である直角三角形 ABC がある．頂点 B，C をそれぞれ始点として，辺 BC に垂直な半直線 l，m を頂点 A のある側にひく．次に辺 BC 上の任意の点 P より辺 AB，AC に垂線をひき，この延長が l，m と交わる点をそれぞれ Q，R とする．

1. 3 点 Q，A，R は一直線上にあることを示せ.
2. 台形 BCRQ の面積が三角形 ABC の面積の 2 倍になるとき，この台形の形を求めよ．ただし，$AB \neq AC$ とする.

解答



1.
AB と PQ は直交するので AB と PQ の交点を L とすると $\angle$ALP$= 90^\circ$
同様に AC と PR の交点を M とすると $\angle$AMP$= 90^\circ$
したがって四辺形 ALPM は長方形となり AC//PQ,AB//PR
AB//RP より $\angle$ABC$=\angle$RPC
よって $\triangle$ABC と $\triangle$CPR は相似
点 A から BC に降ろした垂線の足を H とすると
$\angle$CMP$= 90^\circ$ より $\mathrm{BH} : \mathrm{HC} = \mathrm{PM} : \mathrm{MR}$
CA を延長した線と PQ の交点を S とすると
CA//PQ より $\mathrm{RS} : \mathrm{SQ} = \mathrm{RM} : \mathrm{MP}$
以上より
$\mathrm{CH} : \mathrm{HB} = \mathrm{RM} : \mathrm{MP} = \mathrm{RS} : \mathrm{SQ}$ より HS//RC
AH//RC なので AH//HS
１点を共有する平行線は等しいので AHS の３点は１直線上にある。
また CAS も１直線上にあるので
AS は同一でない二つの直線上に同時に存在することになり、二つの直線の交点は１点に限るので A と S は同一の点
したがって S は PQ 上の点なので Q,A,R は１直線上にある。
2.
台形 BCRQ の面積は $\dfrac{1}{2}(\mathrm{BQ} + \mathrm{CR})\mathrm{BC}$
三角形 ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\mathrm{AH} \cdot \mathrm{BC}$

よって BCRQ の面積が ABC の面積の 2 倍になるということは $\frac{1}{2}(\mathrm{BQ}+\mathrm{CR})\mathrm{BC} = 2\frac{1}{2}\mathrm{AH}\cdot\mathrm{BC}$
となるので
$\frac{1}{2}(\mathrm{BQ}+\mathrm{CR}) = \mathrm{AH}$
とならなければならない。

$\mathrm{BH}:\mathrm{HC} = u:v$ とする

A は PQ 上にあり AH は BQ に平行なので

したがって $\mathrm{AH} = \frac{1}{u+v}(u\mathrm{CR}+v\mathrm{BQ})$ となる。

これが $\frac{1}{2}(\mathrm{BQ}+\mathrm{CR})$ と一致するので

$$\begin{aligned}\frac{1}{u+v}(u\mathrm{CR}+v\mathrm{BQ}) &= \frac{1}{2}(\mathrm{BQ}+\mathrm{CR})\\ 2u\mathrm{CR}+2v\mathrm{BQ}) &= ((u+v)\mathrm{BQ}+(u+v)\mathrm{CR})\\ (u-v)\mathrm{CR} &= (u-v)\mathrm{BQ}\end{aligned}$$

$u = v$ だった場合 BH=HC となり $\triangle$AHB と $\triangle$AHC は 2 辺とその間の角が等しい三角形なので合同となり

$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ となるがこれは前提に反するので $u \neq v$

したがって $u - v \neq 0$ なので両辺を $u - v$ で割ると

$\mathrm{CR} = \mathrm{BQ}$

以上よりこのときの台形の形は長方形

証明終了