京都大学　1983年　入学試験　理系数学　問題5

問題

xy 平面上に動点 P，Q がある．Q は時刻 0 のとき点 $(0,-b)$ にあり（$b>0$），速さ 1 で y 軸上を正の向きに進む．他方 P は時刻 0 のとき x 軸上の点 $(-a,0)$ にあり（$a>0$），速さ 1 で x 軸上を正の向きに進み，ある時刻 t（$t \geqq 0$）で向きを変え，速さを $\sqrt{2}$ に変更して Q に到達するように直進するものとする．時刻 t から到達する時刻までの時間が最小になるような t を求めよ．ただし，$0<a<b$ とする．

解答

P が Q に到達する点を M としその座標を $(0,m)$ とし、その時刻を s とする。Q は s の時点で M に到達するので $m+b=s$ となる。
$t \leqq s$ である。
この間に P は t まで x 軸方向に移動し、その後速度 $\sqrt{2}$ で $(0,m)$ に向かって移動するので t の時の点 P の位置 $(t-a,0)$ から点 $\mathrm{M}(0,m)$ までの距離 $\sqrt{(t-a)^2+m^2}$ は速度 $\sqrt{2}$ で $(s-t)$ の時間移動するので $(s-t)\sqrt{2}$ と等しい。
したがって $(t-a)^2+(s-b)^2=2(s-t)^2$
よって

$$\begin{aligned}(t-a)^2+(s-b)^2&=2(s-t)^2\\ t^2-2at+a^2+s^2-2bs+b^2&=2s^2-4st+2t^2\\ s^2-4st+t^2+2at+2bs-a^2-b^2&=0\end{aligned}$$

よって $s=2t-b\pm\sqrt{3t^2+(-4b-2a)t+2b^2+a^2}$
t から到達する時間 s までの時間は $s-t$ なので $s-t=t-b\pm\sqrt{3t^2+(-4b-2a)t+2b^2+a^2}$
$\pm$ の符号について考える。
$s-t=t-b-\sqrt{3t^2+(-4b-2a)t+2b^2+a^2}$ とすると
$t-b<0$ の時は $t-b-\sqrt{3t^2+(-4b-2a)t+2b^2+a^2}<0$ なので $s-t>0$ に反するので
$t-b>0$
しかし

$$\begin{aligned}&3t^2+(-4b-2a)t+2b^2+a^2\\ &=2t^2-4bt+2b^2+t^2-2at+a^2\\ &=2(t-b)^2+(t-a)^2>(t-b)^2>0\end{aligned}$$

$3t^2+(-4b-2a)t+2b^2+a^2>(t-b)^2$ となり $t-b-\sqrt{3t^2+(-4b-2a)t+2b^2+a^2}<0$ となり
$t-b>0$ であっても $s-t<0$ となるので条件に反するから
$s-t=t-b+\sqrt{3t^2+(-4b-2a)t+2b^2+a^2}$ でなければならない。

$f(t)=t-b+\sqrt{3t^2+(-4b-2a)t+2b^2+a^2}$ として
$f'(t)=\dfrac{\sqrt{3t^2+(-4b-2a)t+2b^2+a^2}+3t-2b-a}{\sqrt{3t^2+(-4b-2a)t+2b^2+a^2}}$
$3t^2+(-4b-2a)t+2b^2+a^2>0$ より $f'(t)$ の分母は常に実数で正なので
$f'(t)$ の正負は分子の正負と一致する。
$\sqrt{2(t-b)^2+(t-a)^2}+2(t-b)+(t-a)$ は
$2(t-b)^2+(t-a)^2<(2(t-b)+(t-a))^2$ でかつ $2(t-b)+(t-a)<0$ のとき負となるので

$2(t-b)+(t-a)<0$ ならば $t<\dfrac{2b+a}{3}$ より $t-b<\dfrac{a-b}{3}$ であり

$a<b$ より $a-b<0$ なので $t-b<0$

よって $(2(t-b)+(t-a))^2-(2(t-b)^2+(t-a)^2)=2(t-b)(3t-b-2a)>0$ となるのは

$3t-b-2a<0$ のとき

よって $t<\dfrac{b+2a}{3}$

$2b+a-(b+2a)=b-a>0$ より $\dfrac{2b+a}{3}>\dfrac{b+2a}{3}$ なので

$t<\dfrac{2a+b}{3}$ のとき $f'(t)<0$

$t=\dfrac{2a+b}{3}$ のとき $f'(t)=0$

$t>\dfrac{2a+b}{3}$ のとき $f'(t)>0$

よって $f(t)$ は $t=\dfrac{2a+b}{3}$ のとき最小となる。

以上より時刻 t から到達する時刻までの時間が最小になるのは $t=\dfrac{2a+b}{3}$

証明終了