京都大学　1983 年　入学試験　理系数学　問題 6

問題

内側が直円すい形の容器がある．その回転軸は鉛直で，頂点が最低点，深さは h で，上面は半径 R の円である．この容器に上面まで満たされた水を，断面積が S の管を通じて．最低点からポンプで流出させるとする．水の流出速度 v は，そのときの水面の高さを x とすれば，$v = kx$（k は正の定数）で与えられるようにポンプが調整されているものとする．流出し始めた時刻を $t = 0$ として，時刻 t における水面の高さ $x(t)$ を求めよ．ただし，t は容器が空になる時刻までに限定する．（時刻 t と $t + \mathit{\Delta} t$ の間に流出する水量を $\mathit{\Delta} Q$ とすれば，$\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta} t \to 0} \frac{\mathit{\Delta} Q}{\mathit{\Delta} t} = Sv$ がなりたつ．）

解答

時刻 t における水面の高さ $x(t)$ なので
t における流出速度は $v = kx(t)$ $\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta} t \to 0} \frac{\mathit{\Delta} Q}{\mathit{\Delta} t} = Sv$ より
$\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta} t \to 0} \frac{\mathit{\Delta} Q}{\mathit{\Delta} t} = Skx$
つまり
時刻 t までに流出した水量を Q とすると
$\displaystyle\lim_{\mathit{\Delta} t \to 0} \frac{Q + \mathit{\Delta} Q - Q}{t + \mathit{\Delta} t - t} = Skx$
$\displaystyle\frac{dQ}{dt} = Skx(t)$ となる。
より $Q = f(t)$ とすると
$f'(t) = Skx(t)$
$\displaystyle f(t) = \frac{\pi R^2 h}{3} - \frac{\pi R^2 x^2(t)}{3h^2}$、$f(0) = 0$ となので
$\displaystyle\int_0^t f'(s)\,ds = f(t) - f(0) = \frac{\pi R^2 h}{3} - \frac{\pi R^2 x^2(t)}{3h^2} = \int_0^t Skx(t)\,dt$
よって $\displaystyle\int_0^t x(s)\,ds = \frac{\pi R^2}{3Sk}\left(h - \frac{x^2(t)}{h^2}\right)$
両辺を微分すると $\displaystyle x(t) = \frac{\pi R^2}{3Sk}\left(-\frac{2x(t)x'(t)}{h^2}\right)$
$\displaystyle 1 = \frac{\pi R^2}{3Sk}\left(-\frac{2x'(t)}{h^2}\right)$
$\displaystyle -\frac{3Skh^2}{2\pi R^2} = x'(t)$
よって $\displaystyle x(t) = -\frac{3Skh^2}{2\pi R^2}t + C$ $x(0) = h$ より $C = h$
よって

$$x(t) = -\frac{3Skh^2}{2\pi R^2}t + h$$

証明終了