京都大学　1984 年　入学試験　文系数学　問題 2

問題

定数 c（$c \neq 0$）に対して，等式 $f(x+c)=f(x)$ がすべての x について成り立つとき，関数 $f(x)$ は周期関数であるといい，またこの等式を満たすような正の数 c のうちの最小値を，$f(x)$ の周期という．次の関数は周期関数であることを示し，またその周期を求めよ．

1. $f(x)=2^{\sin x}$
2. $f(x)=\sin(\sin x)$

解答

1.
$\sin x$ は周期関数でその周期は 2π
したがって $f(x)$ は $f(x+2\pi)=2^{\sin(x+2\pi)}=2^{\sin x}=f(x)$ となり
周期関数であり、少なくとも周期は 2π 以下である。
$f(x+c)=f(x)$ が $0 \leqq c < 2\pi$ で成立するとすると
2^x は単調増加でその微分係数 $\log 2\, 2^x$ は常に正なので
$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で x が異なるとき値は異なるので $\sin x + c = \sin x$ が成立しなければならない。
そうすると $\sin x$ の周期が $c < 2\pi$ となり $\sin x$ の周期が 2π であることに反する。
よって、$f(x)$ の周期は 2π

2.
1 と同様に $f(x)$ は少なくとも周期 2π 以下の周期関数である。
$f(x+c)=f(x)$ が $0 \leqq c < 2\pi$ で成立するとすると
$\sin x$ は $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で単調増加で微分係数 $\cos x$ は常に正なので
$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で x が異なるとき値は異なるので $\sin x + c = \sin x$ が成立しなければならない。
そうすると $\sin x$ の周期が $c < 2\pi$ となり $\sin x$ の周期が 2π であることに反する。
よって、$f(x)$ の周期は 2π

証明終了