京都大学　1984 年　入学試験　文系数学　問題 3

問題

実数 t の値によって定まる点 $\mathrm{P}(t+1,t)$ と $\mathrm{Q}(t-1,-t)$ がある．t が区間 $[0,1]=\{t \mid 0 \leqq t \leqq 1\}$ を動くとき，線分 PQ が通過する範囲の面積を求めよ．

解答

時刻 t における点 P を $\mathrm{P}(t)$ Q を $\mathrm{Q}(t)$ とする。
区間 $[0,1]$ を整数 n で等分しそれぞれの時刻を $t_k(0 \leqq k < n)$ とする
つまり $t_k = \dfrac{k}{n}$
$\mathrm{P}(t_k)\mathrm{Q}(t_k)$ と $\mathrm{P}(t_{k+1})\mathrm{Q}(t_{k+1})$ の交点を $\mathrm{R}(t_k)$ とし三角形 $\mathrm{Q}(t_k)\mathrm{R}(t_k)\mathrm{Q}(t_{k+1})$ の面積を $S(t_k)$ とすると線分 PQ の通過する部分の面積は

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} S(t_k)$$

となる。
$\mathrm{R}(t_k)$ は線分 $(t_k+1,t_k)(t_k-1,-t_k)$ と $(t_{k+1}+1,t_{k+1})(t_{k+1}-1,-t_{k+1})$ の交点なので
$\mathrm{P}(t_k)\mathrm{Q}(t_k)$ を通る直線の式を $y=ax+b$ とすると

$$\begin{aligned} t_k &= a(t_k+1)+b \\ -t_k &= a(t_k-1)+b \end{aligned}$$

より
$a=\dfrac{k}{n}, b=-\dfrac{k^2}{n^2}$
$\mathrm{P}(t_{k+1})\mathrm{Q}(t_{k+1})$ を通る直線の式を $y=cx+d$ とすると
$c=t_{k+1}, d=-t_{k+1}^2$ となり、$t_{k+1}=t_k+1/n$ なので $c=\dfrac{k+1}{n}, d=-\dfrac{(k+1)^2}{n^2}$ となる。

$$\begin{aligned} y &= \frac{k}{n}x - \frac{k^2}{n^2} \\ y &= \frac{k+1}{n}x - \frac{(k+1)^2}{n^2} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} n^2y &= knx-k^2 \\ n^2y &= n(k+1)x-(k+1)^2 \\ knx-k^2 &= nkx+nx-k^2-2k-1 \\ nx-2k-1 &= 0 \\ nx &= 2k+1 \\ x &= \frac{2k+1}{n} \\ y &= \frac{k(k+1)}{n^2} \end{aligned}$$

よって $\mathrm{R}(t_k)=(\dfrac{2k+1}{n},\dfrac{k(k+1)}{n^2})$
このとき面積 $S(t_k)$ は

$$
\begin{aligned}
S(t_k) = &(\frac{2k+1}{n} - (\frac{k}{n} - 1))(\frac{k(k+1)}{n^2} - (-\frac{k+1}{n})) \\
&-\frac{1}{2}(\frac{2k+1}{n} - (\frac{k}{n} - 1))(\frac{k(k+1)}{n^2} - (-\frac{k}{n})) \\
&-\frac{1}{2}(\frac{2k+1}{n} - (\frac{k+1}{n} - 1))(\frac{k(k+1)}{n^2} - (-\frac{k+1}{n})) \\
&-\frac{1}{2}(\frac{1}{n^2}) \\
= &\frac{(n+k)(n+k+1)}{2n^3}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} S(t_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n+k)(n+k+1)}{2n^3} \\
&= \frac{1}{2n^3} \sum_{k=0}^{n-1} (n+k)(n+k+1) \\
&= \frac{1}{2n^3} \sum_{k=0}^{n-1} n^2 + 2kn + n + k^2 + k \\
&= \frac{1}{2n^3} (n^3 + n^2 + (2n+1) \sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} k^2) \\
&= \frac{1}{2n^3} (n^3 + n^2 + (2n+1) \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}) \\
&= \frac{1}{12n^3} (6n^3 + 6n^2 + 6(2n+1)n(n-1) + n(n-1)(2n-1)) \\
&= \frac{20n^3 + 3n^2 + 5n}{12n^3} \\
&= \frac{5}{3} + \frac{3n+5}{12n^2}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} S(t_k) &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{3} + \frac{3n+5}{12n^2} \right) \\
&= \frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

よって面積は

$$
\frac{5}{3}
$$

証明終了