

問題

$f(x)$ と $g(x)$ はいずれも x の整式で、次の条件を満たしているとする。

- (イ) $f(x) = \{g(x)\}^2 + a$ (ただし a はある実数.)
- (ロ) $g'(x) = x + 1$ (ただし、 $g'(x)$ は $g(x)$ の導関数を表す.)
- (ハ) $f(-1) = f(1) = 0$

実数 k を定数とすると、 $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x) + k$ のグラフとの (k の値によって変わる) 交点の個数を求めよ。

解答

$$g'(x) = x + 1 \text{ より、} g(x) = \frac{x^2}{2} + x + C$$

$$\text{したがって、} f(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)^2 + a$$

$$f(-1) = f(1) = 0 \text{ より、}$$

$$\left(\frac{(-1)^2}{2} + (-1) + C\right)^2 + a = 0$$

$$\left(\frac{(1)^2}{2} + (1) + C\right)^2 + a = 0$$

これを計算すると、

$$\left(\frac{1}{2} - 1 + C\right)^2 + a = \left(C - \frac{1}{2}\right)^2 + a = 0$$

$$\left(\frac{1}{2} + 1 + C\right)^2 + a = \left(C + \frac{3}{2}\right)^2 + a = 0$$

$$\left(C - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(C + \frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(\left(C - \frac{1}{2}\right) - \left(C + \frac{3}{2}\right)\right)\left(\left(C - \frac{1}{2}\right) + \left(C + \frac{3}{2}\right)\right) = 0$$

$$(-2)(2C + 1) = 0$$

$$\text{よって、} C = -\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{(1)^2}{2} + (1) + C\right)^2 + a = 0 \text{ に代入して}$$

$$\left(\frac{(1)^2}{2} + 1 - \frac{1}{2}\right)^2 + a = 0$$

$$a + 1 = 0$$

よって $a = -1$ となる。以上より、

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}$$

$y = f(x)$ と $y = g(x) + k$ の交点の個数は $f(x) - g(x) - k = 0$ の解の数に等しい

$$\begin{aligned}
 f(x) - g(x) - k &= \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 - \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} - k \\
 &= \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 - \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} - k \\
 &= \frac{x^4 + 4x^3 - 8x - 4k - 1}{4}
 \end{aligned}$$

$h(x) = f(x) - g(x) - k$ とすると

$$h'(x) = (x+1)(x^2 + 2x - 2)$$

となり、 $x = -1, -1 \pm \sqrt{3}$ で極値をとる。

$$h(-1) = \frac{1 - 4 + 8 - 4k - 1}{4} = \frac{4 - 4k}{4} = 1 - k$$

$$h(-1 \pm \sqrt{3}) = \frac{-5 - 4k}{4} = -\frac{5}{4} - k$$

$h(x)$ の増減表を作ると

x		$-1 - \sqrt{3}$		-1		$-1 + \sqrt{3}$	
$h(x)$	$\searrow$	$-\frac{5}{4} - k$	$\nearrow$	$1 - k$	$\searrow$	$-\frac{5}{4} - k$	$\nearrow$

したがって、 $-\frac{5}{4} - k > 0$ つまり $k < -\frac{5}{4}$ のときは交点は無し

$-\frac{5}{4} - k = 0$ つまり $k = -\frac{5}{4}$ のときは交点は 2

$-\frac{5}{4} - k < 0, 1 - k > 0$ つまり $k > -\frac{5}{4}$ かつ $k < 1$ のときは交点は 4

$1 - k = 0$ つまり $k = 1$ のときは交点は 3

$1 - k < 0$ つまり $k > 1$ のときは交点は 2

となる

以上をまとめると

k	交点
$k < -\frac{5}{4}$	0
$k = -\frac{5}{4}$	2
$k > -\frac{5}{4}$ かつ $k < 1$	4
$k = 1$	3
$k > 1$	2

証明終了