京都大学　1984年　入学試験　文系数学　問題5

問題

つぼの中に r 個（$r \geqq 1$）の赤球と，s 個（$s \geqq 0$）の白球が入っている．A と B の 2 人が，交互に球を 1 個ずつとり出し，先に赤球をとり出した者を勝者とするゲームをする．ただし，とり出した球は，もとにもどさないものとする．

1. 　ちょうど i 回目（すなわち A，B 2 人のとり出した球の合計が，ちょうど i 個になった時）に勝者がきまる確率を P_i とするとき，$P_i \geqq P_{i+1}$（$i = 1,\ 2,\ \cdots$）となることを示せ．
2. 　このゲームを A からはじめるとする．任意の r，s に対して，A が勝者となる確率は，$\dfrac{1}{2}$ またはそれ以上であることを示せ．

解答

1. 1回目でが勝者が決まる確率は $\dfrac{r}{r+s}$
   したがって1回目で勝者が決まらない確率は $\dfrac{s}{r+s}$
   i 回目で勝者が決まるためには、$i-1$ 回目まで勝者が決まらないことが必要。
   n 回目まで勝者が決まらなかったということはこれまでに n 個の白球が取り出されていることになり n 回目まで勝者が決まらなかった確率を Q_n とすると $n+1$ 回目にも勝者が決まらない確率は
   $Q_{n+1} = \dfrac{s-n}{r+s-n}Q_n$ となる
   $P_i = Q_{i-1}\dfrac{r}{r+s-(i-1)}$
   $P_{i+1} = Q_i\dfrac{r}{r+s-i)}$
   $Q_{n+1} = \dfrac{s-n}{r+s-n}Q_n$ より $Q_i = \dfrac{s-(i-1)}{r+s-(i-1)}Q_{i-1}$ なので
   $P_{i+1} = \dfrac{s-(i-1)}{r+s-(i-1)}\dfrac{r}{r+s-i}Q_{i-1}$
   $$\begin{aligned}\frac{P_{i+1}}{P_i} &= \frac{\dfrac{s-(i-1)}{r+s-(i-1)}\dfrac{r}{r+s-i}Q_{i-1}}{Q_{i-1}\dfrac{r}{r+s-(i-1)}} \\ &= \frac{s-(i-1)}{r+s-(i-1)}\frac{r}{r+s-i}\frac{r+s-(i-1)}{r} \\ &= \frac{r(s-(i-1))(r+s-(i-1))}{r(r+s-(i-1))(r+s-i)} \\ &= \frac{s-(i-1)}{(r+s-i)}\end{aligned}$$
   $r \geqq 1$ より $s-i+1 \leqq s-i+r$ なので、$\dfrac{P_{i+1}}{P_i} \leqq 1$
   以上により、
   $$P_i \geqq P_{i+1}$$
2. ゲームを A から始めるとすると、奇数回目に A が引き、偶数回目に B が引くことになる。
   s が奇数の場合 A が勝つ確率は $P_A = P_1 + P_3 + P_5 + P_7 \cdots + P_s$
   B が勝つ確率は $P_B = P_2 + P_4 + P_6 + P_8 \cdots + P_{s+1}$
   s が偶数の場合は A が勝つ確率は $P_A = P_1 + P_3 + P_5 + P_7 \cdots + P_{s+1}$

B が勝つ確率は $P_B = P_2 + P_4 + P_6 + P_8 \cdots + P_s$
となる。
どちらにしても、1 で示したとおり $P_i \geqq P_{i+1}$ なので、常に $P_1 \geqq P_2, P_3 \geqq P_4, \ldots$ となり、$P_A \geqq P_B$
$P_A + P_B = 1$ なので、

$$P_A \geqq \frac{1}{2}$$