京都大学　1984 年　入学試験　理系数学　問題 1

問題

方程式 $xy=1$ によって与えられる双曲線を C とし，また次のように，行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって定義される 1 次変換を f とする．$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

1 次変換 f が双曲線 C を C 自身の上へ写すための（a，b，c，d についての）必要十分条件を求めよ．

解答

A= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく

$x'=ax+by$,$y'=cx+dy$ である。

この点 (x',y') が C の上にあるためには

$x'y'=1$ であることが必要なので

$(ax+by)(cx+dy)=acx^2+(ad+bc)xy+bdy^2=1$ であることが必要。

$xy=1$ なので $acx^2+bdy^2+(ad+bc)=1$ また $x\neq 0, y\neq 0$ なので

$y=\dfrac{1}{x}$ を代入すると

$acx^2+bd\dfrac{1}{x^2}+(ad+bc)=1$

両辺に x^2 をかけて

$acx^4+bd+(ad+bc)x^2=x^2$

$acx^4+bd+((ad+bc)-1)x^2=0$

これが任意の x について成立しなければならないので

$ac=0, bd=0, ad+bc=1$ が成立しなければならない。

$a=0$ とすると $bc=1$ である必要があるので $b\neq 0, c\neq 0, c=\dfrac{1}{b}$ なので $d=0$

よって A= $\begin{pmatrix} 0 & b \\ \dfrac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$ このとき $x'=by, y'=\dfrac{x}{b}$ となり

$x'y'=\dfrac{xby}{b}=xy=1$

また A の逆行列は $ad-bc=-1$ より

$\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & b \\ \dfrac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$ となり、存在するので任意の点 Q に写る点 P が存在する。

したがって、f は C を C の上に写す。

$c=0$ とすると $ad=1$ である必要があるので $d\neq 0, a\neq 0, d=\dfrac{1}{a}$ なので $b=0$

A= $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a} \end{pmatrix}$ このとき $x'=ax, y'=\dfrac{y}{a}$ となり

$x'y'=\dfrac{axy}{a}=xy=1$

A の逆行列は同様に $ad-bc=1$ より

$\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{a} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ となり、存在するので任意の点 Q に写る点 P が存在する。

したがって、f は C を C の上に写す。

以上より a, b, c, d について

$$a = 0, b \neq 0, c = \frac{1}{b}, d = 0$$

または

$$a \neq 0, b = 0, c = 0, d = \frac{1}{a}$$

が必要十分。

証明終了