

問題

定数 c ($c \neq 0$) に対して、等式 $f(x+c) = f(x)$ がすべての x について成り立つとき、関数 $f(x)$ は周期関数であるといい、またこの等式を満たすような正の数 c のうちの最小値を $f(x)$ の周期という。

次の関数は周期関数であるか否かを、理由をつけて答えよ。また、周期関数である場合には、その周期を求めよ。

1. $f(x) = \sin(\sin x)$
2. $f(x) = \cos(\sin x)$
3. $f(x) = \sin(x^3)$

解答

1. $f(x) = \sin(\sin x)$

$f(x+c) = \sin(\sin(x+c))$ 、 $f(x) = \sin(\sin x)$ なので

少なくとも $c = 2\pi$ とすると $\sin(x+c) = \sin(x)$ より、 $f(x+c) = f(x)$ となり、

$f(x) = \sin(\sin x)$ は周期関数

c が 2π より小さいと仮定する。

この時 $\sin x$ の値域は -1 から 1 の範囲となるが、 $\sin x$ は $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で常に微分係数 $\cos x$ が正 (> 0) なので全単射、

よって $\sin(\sin(x+c)) = \sin(\sin x)$ ならば $\sin(x+c) = \sin x$ が成立する。

加法定理 $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ より $\sin(x+c) = \sin x \cos c + \cos x \sin c = \sin x$

$\sin x(\cos c - 1) = -\cos x \sin c$ となるような定数 $(\cos c - 1, \sin c)$ が必要

この式が任意の x について成立するような定数は 0 以外にはないので、 $\sin c = 0$ かつ $\cos c = 1$ であることが必要。

しかし $0 < c < 2\pi$ の範囲ではこのような値は取り得ない。

よって $c \geq 2\pi$ 以上となる。

以上より $\sin x$ は周期関数で周期は 2π

したがって

$$f(x) = \sin(\sin x) \text{ は周期関数で周期は } 2\pi$$

2. $f(x) = \cos(\sin x)$

1. と同様に少なくとも $c = 2\pi$ とすると $\sin(x+c) = \sin(x)$ より、 $f(x+c) = f(x)$ となり、

$f(x) = \cos(\sin x)$ は周期関数

$\cos x$ は偶関数なので $\cos x = \cos -x$

したがって $\cos(\sin x) = \cos(-\sin x)$ また $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ となるので

$$\cos(\sin(x+\pi)) = \cos(-\sin x) = \cos(\sin x)$$

以上により $c = \pi$ においても $f(x+c) = f(x)$ が成立する。

次に $0 < c < \frac{\pi}{2}$ において考える

$0 < x < \pi$ の範囲では、 $0 < \sin x < 1$

$0 < x < 1$ の範囲で $\cos x$ は微分係数 $-\sin x$ が常に負 (< 0) なのでこの範囲では全単射

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ かつ $0 < c < \frac{\pi}{2}$ なので $0 < x+c < \pi$ したがって、 $\cos(\sin x) = \cos(\sin(x+c))$ が任意の

x で成立するためには $\sin x = \sin(x + c)$ となる。

しかし、 $\sin x$ の周期は 2π なので、このような c は存在しない。

$\frac{\pi}{2} \leq c < \pi$ において考える

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ の区間で $\pi < x + c < 2\pi$ となる。

この区間では $\sin(x + c) = -\sin(x + c - \pi)$ となるので $\cos(\sin x) = \cos(\sin(x + c))$ が成立するためには

$\cos(\sin x) = \cos(-\sin(x + c - \pi))$ が成立すればよい。

したがって $\cos(\sin x) = \cos(\sin(x + c - \pi))$ となりこの区間でみれば両辺とも全単射になるので $\sin x = \sin(x + c - \pi)$ が必要。

$\sin x$ の周期は 2π なので $\sin(x + c - \pi) = \sin(x + c + \pi)$ となる。

しかし $\frac{\pi}{2} \leq c < \pi$ なので $c + \pi < 2\pi$ となり $\sin x$ の周期が 2π であることと矛盾する。

よって c はこの範囲にありえない。

以上より

$f(x) = \cos(\sin x)$ は周期関数で、周期は π

3. $f(x) = \sin(x^3)$

周期関数の定義から導関数が存在すれば、その導関数も同じ周期の周期関数となる。

$$f'(x + c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + c + h) - f(x + c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(xh) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$f(x)$ の導関数は $f'(x) = 3x^2 \cos(x^3)$ となる。

$f'(x)$ が周期関数であれば、 $0 \leq x \leq c$ の範囲の値が繰り返されるはずなので、この区間に最大値があれば全域での最大値にならねばならない。

$f'(x)$ において任意の有限の値 c をとったとき、 0 から c までの範囲の最大値は $3c^2$ を超えることは無いが、全域においては最大値が存在しない。

よって、 $f'(x)$ は周期関数ではない。

したがって、

$f(x) = \sin(x^3)$ は周期関数ではない。