京都大学　1984 年　入学試験　理系数学　問題 3

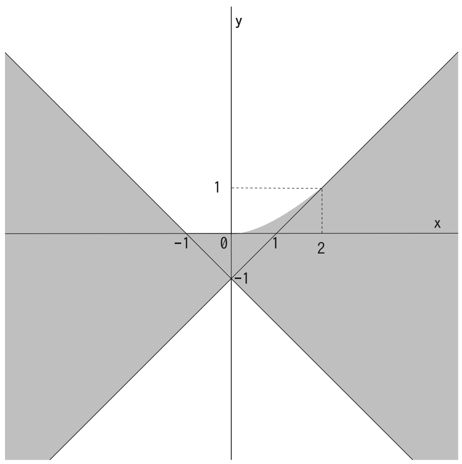
問題

実数 t の値によって定まる点 $\mathrm{P}(t+1, t)$ と $\mathrm{Q}(t-1, -t)$ がある.

1. t がすべての実数を動くとき，直線 PQ が通過する範囲を図示せよ.
2. t が区間 $[0,1] = \{t \mid 0 \leqq t \leqq 1\}$ を動くとき，線分 PQ が通過する範囲の面積を求めよ.

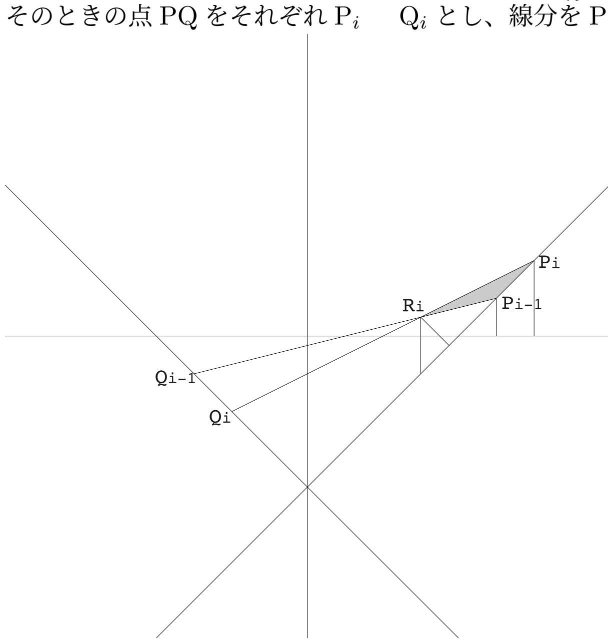
解答

1.



2. t が区間 $[0,1] = \{t \mid 0 \leqq t \leqq 1\}$ を動くとき，線分 PQ が通過する範囲の面積

P の移動する線分を線分 p とする。線分 PQ は $y = tx - t^2$ で表される。
n を整数として、t の区間 $[0,1]$ を n 等分し、$t_i = \dfrac{i}{n}$ とする。
そのときの点 PQ をそれぞれ P_i　Q_i とし、線分を PQ_i とする。



線分 PQ_{i-1} と PQ_i の交点 R_i とすると線分 PQ が通過する範囲の面積は三角形 $\mathrm{R}_i\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i$ の面積を $i = 1 \to n$ まで加算し、n の極限を取った物となる。
三角形 $\mathrm{R}_i\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i$ は $\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i$ を底辺と考え交点 R_i から線分 p におろした垂線を高さとする三角形となる。
底辺 $\mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i$ 長さは t_i と t_{i-1} の差 $\dfrac{1}{n}$ の $\sqrt{2}$ 倍なので $\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ となる。

線分 p は 45 度に傾いているので、垂線の長さは交点 R_i と線分 p の y 座標の値の差の $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍となる。
$y=t_ix-t_i^2$ と $y=t_{i-1}x-t_{i-1}^2$ の交点は $(t_i+t_{i-1}, t_it_{i-1})$ となり、
同じ x 座標の直線 p 上の点は $(t_i+t_{i-1}, t_i+t_{i-1}-1)$ なので、y 座標の差は $t_it_{i-1}-t_i+t_{i-1}+1$ となるので、
垂線の長さは $\dfrac{t_it_{i-1}-t_i+t_{i-1}+1}{\sqrt{2}}$ となる。
$t_i=\dfrac{i}{n}$ なので、垂線の長さは

$$\frac{t_it_{i-1}-t_i+t_{i-1}+1}{\sqrt{2}}=\frac{i(i-1)-2in+n+n^2}{\sqrt{2}n^2}=\frac{(n-i)(n-i+1)}{\sqrt{2}n^2}$$

となる。
従って、面積は

$$\frac{1}{2}\times\frac{(n-i)(n-i+1)}{\sqrt{2}n^2}\times\frac{\sqrt{2}}{n}=\frac{(n-i)(n-i+1)}{2n^3}$$

これを 1 から n まで加えた物が x 軸より上側の面積となるので、

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n}\frac{(n-i)(n-i+1)}{2n^3}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{i^2-(2n+1)i+n^2+n}{2n^3}\\
&= \frac{1}{2n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2-(2n+1)i+n^2+n\\
&= \frac{1}{2n^3}\left(\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)-(2n+1)\left(\frac{1}{2}n(n-1)\right)+n^3+n^2\right)\\
&= \frac{n^2+3n+2}{6n^2}
\end{aligned}$$

n の極限を取ると

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{6}$$

x 軸より下の部分の面積が 1 なのでこれを加算して

$$\frac{7}{6}$$