京都大学　1984年　入学試験　理系数学　問題4

問題

空間に三角形 ABC があるとし，空間の原点 O は，この三角形が決定する平面上にはないとする．

1. 実数 u，v，w が，等式 $u\vec{\mathrm{OA}}+v\vec{\mathrm{OB}}+w\vec{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ を満たすならば，$u=v=w=0$ であることを示せ．
2. 辺 BC，CA，AB の長さを，それぞれ a，b，c とし，三角形 ABC の内接円の中心を P とすると，等式 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+v\overrightarrow{\mathrm{OB}}+w\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が成立するという．u，v，w を a，b，c を用いて表せ．

解答

1.

u,v,w のうちどれかひとつが 0 ではなく残りの二つが 0 であったとする。

u が 0 でないならば、$u\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{0}$ となるが、原点 O は三角形 ABC の決定する平面上にないので、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\neq\overrightarrow{0}$

したがって $u=0$ となる。

u,v,w は対等なので、同様に u,v,w のうちひとつだけが 0 ではないという事はない。

u,v,w のうちひとつだけが 0 であるとする

仮に w が 0 だとすると

$u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+v\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{0}$

となり、$u\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

となる。これは、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表されることになるので、OAB が一直線上に存在することを意味する。しかし、原点 O は三角形 ABC の決定する平面上にないので矛盾する。したがって w のみが 0 であることはない。

u,v,w は対等なので、同様に u,v,w のうちひとつだけが 0 ということはない。

u,v,w すべてが 0 でないとする。

$u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+v\overrightarrow{\mathrm{OB}}+w\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{0}$ なので $-\dfrac{u}{w}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{v}{w}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

となり $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表されることになる。

これは、点 C が三点 OAB の決定する平面上にあることを意味するが、点 O が三角形 ABC の決定する平面上にあることと矛盾する。

したがって、u,v,w のすべてが 0 以外とはならない。

以上により、u,v,w はすべて 0 である。

2.

三角形 ABC の決定する平面上の点 Q をとると点 P は内心なので $\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\dfrac{a\overrightarrow{\mathrm{QA}}+b\overrightarrow{\mathrm{QB}}+c\overrightarrow{\mathrm{QC}}}{a+b+c}$ となる。

点 O からのベクトルで考えると

$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

$\overrightarrow{\mathrm{QA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

$\overrightarrow{\mathrm{QB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

$\overrightarrow{\mathrm{QC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

と書けるので

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{QP}} &= \frac{a\overrightarrow{\mathrm{QA}} + a\overrightarrow{\mathrm{QB}} + a\overrightarrow{\mathrm{QC}}}{a+b+c} \\
&= \frac{a(\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}}) + b(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}}) + c(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}})}{a+b+c} \\
&= \frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}} - a\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} - b\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + c\overrightarrow{\mathrm{OC}} - c\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{a+b+c} \\
&= \frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c} - \frac{a\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + b\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + c\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{a+b+c} \\
&= \frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c} - \frac{(a+b+c)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{a+b+c} \\
&= \frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}}
\end{aligned}$$

となり

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}$$

となる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}} + c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}$$

となり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

よって

$$u = \frac{a}{a+b+c}$$

$$v = \frac{b}{a+b+c}$$

$$w = \frac{c}{a+b+c}$$