京都大学　1984 年　入学試験　理系数学　問題 6

問題

区間 $[a,b]=\{x \mid a \leqq x \leqq b\}$ で定義された関数 $f(x)$ について，次のことを仮定する．

(イ)　関数 $f(x)$ は連続であり，さらに $f(x)$ およびその導関数 $f'(x)$ について，微分と積分を自由に行うことができる．

(ロ)　区間 $[a,b]$ で，つねに不等式 $a \leqq f(x) \leqq b$ が成り立つ．

(ハ)　区間 $[a,b]$ でつねに不等式 $|f'(x)| \leqq k < 1$ が成り立つような定数 k が存在する．

このとき，次の問に答えよ．

1. 等式 $f(c_0)=c_0$ を満たす値 c_0 が，区間 $[a,b]$ の中に，ただ 1 つ存在することを，簡単に説明せよ．
2. 区間 $[a,b]$ の中の（任意の）1 つの値 d_0 から出発して，$d_1=f(d_0)$，$d_{n+1}=f(d_n)$（$n=1,\ 2,\ \cdots$）とおく．このとき，不等式 $|d_n-c_0| \leqq k^n|d_0-c_0|$（$n=1,\ 2,\ \cdots$）が成立することを示せ．ただし，$c_0$ は問 (1) に述べられている値とする．

解答

1. 等式 $f(c_0)=c_0$ を満たす値 c_0 が存在するということは、$g(x)=x$ との交点が存在することと等しくつまり $f(x)-g(x)=0$ となる点 x が存在することと等しい。
   $h(x)=f(x)-g(x)$ とすると $g'(x)=1$ でかつ $|f'(x)|<1$ なので $h'(x)=f'(x)-g'(x)<0$ が常に成立する。
   よって $h(x)$ は単調減少。またこの区間で $a \leqq f(x) \leqq b$ が常に成立するので $a \leqq f(a) \leqq b$ かつ $a \leqq f(b) \leqq b$
   $g(x)=x$ なので $h(a)=f(a)-g(a) \geqq 0$ かつ $h(b)=f(b)-g(b) \leqq 0$
   しかし $h(a)=0$ かつ $h(b)=0$ だとすると $f(a)=a$ かつ $f(b)=b$ となり平均値の定理から $f'(x)=1$ となる点がこの区間に存在することとなり条件に反するので $h(a), h(b)$ のいずれかは 0 ではない。
   以上より中間値の定理により $h(a)=0$ となる点がただ一つ存在する。
   したがって $f(c_0)=c_0$ となる c_0 がただ一つ存在する。
2. $y=f(x)$ のグラフは点 $(c_0, f(c_0))$ を通り傾き $\pm k$ の直線で挟まれた領域で変化する。
   この直線の範囲から出る点 $f(x), x)$ があったとすると $f(x)$ の値が $c_0 \pm k(x-c_0)$ の値より大きいか小さいことになり
   平均値の定理より $[c_0, x]$ の区間で、$(f'(x)| > k$ となる点が存在することになるので、すべての点 $(f(x), x)$ は上記の直線に挟まれた範囲にある。
   従って、常に $|f(x)-c_0| \leqq |k(x-c_0)|$ となり、
   $|d_n-c_0| \leqq k|d_{n-1}-c_0|$ ($n=1,\ 2,\ \cdots$) が成立する
   よって、$|d_n-c_0| \leqq k^n|d_0-c_0|$（$n=1,\ 2,\ \cdots$）が成立する。