京都大学　1985 年　入学試験　理系数学　問題 3

問題

b, c は実数とし，$x^2+2bx+c=0$ の 2 根を α, β とする．

1. $b^2-c<0$, $b\neq 0$ とすれば，いかなる複素数 γ に対しても $\gamma=t\alpha+u\beta$ となる実数 t, u が存在することを示せ．
2. $f(x)=x^2+2(b-1)x+5-c$ とおくとき，次の条件（$*$）を満たす点 (b,c) 全体の集合 D を決定し，図示せよ．

   （$*$） t, u がともに実数なら，$f(t\alpha+u\beta)\neq 0$

解答

$x^2+2bx+c=(x+b)^2-b^2+c=0$ より、$(x+b)^2=b^2-c$
よって、$b^2-c<0$ かつ $b\neq 0$ ならば、$(x+b)$ は虚数で、p を実数,i を虚数単位として $x+b=\pm pi$ と表せる。$b^2-c\neq 0$ より $p\neq 0$
したがって $x=-b\pm pi$　$((pi)^2=b^2-c)$

このとき、α,β は、この解なので、$\alpha=-b+pi\beta=-b-pi$ と表せる。ここで、任意の複素数 $\gamma=q+ri(q,r$ は実数) について、
$t\alpha+u\beta=\gamma$ つまり $-bt+pti+-bu-pui=-b(t+u)+pi(t-u)=q+ri$
$t+u=-\dfrac{q}{b}$
$t-u=\dfrac{r}{p}$
となる (条件から b,p はともに 0 ではない)
よって、これを t,u について解くと
$t=-\dfrac{q}{2b}+\dfrac{r}{2p}$ $u=-\dfrac{q}{2b}-\dfrac{r}{2p}$ となり、任意の γ について t,u は存在する。

2) α,β はともに $x^2+2bx+c=0$ の解なので $\alpha+\beta=-2b,\alpha\beta=c$ となる。
$g(x)=x^2+2bx+c$ とすると
$f(x)=x^2+2(b-1)x+5-c=x^2+2bx+c-2x+5=g(x)-2x+5$ より

$$\begin{aligned}
f(t\alpha+u\beta)&=g(t\alpha+u\beta)-2(t\alpha+u\beta)+5\\
&=(t\alpha+u\beta)^2+2b(t\alpha+u\beta)+c-2(t\alpha+u\beta)+5\\
&=t^2\alpha^2+2tu\alpha\beta+u^2\beta^2+2bt\alpha+2bu\beta+c-2(t\alpha+u\beta)+5\\
&=t^2\alpha^2+2tuc+u^2\beta^2+2bt\alpha+2bu\beta+c-2(t\alpha+u\beta)+5
\end{aligned}$$

証明終了