京都大学　1986 年　入学試験　理系数学　問題 1

問題

すべては 0 でない n 個の実数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n があり，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ かつ $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$ を満たすとき，$a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n > 0$ が成り立つことを証明せよ.

解答

$$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \tag{1}$$
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0 \tag{2}$$

(1) より数列、$a_1, a_2, \cdots, a_n$ は単調増加

$f(n) = a_n$ を満たす実数関数で連続かつ単調増加なものが構成できる。

1 例として以下のものを考える。

$$f(x) = \begin{cases} (a_2 - a_1)(x-1) + a_1 \ (1 \leqq x < 2) \\ \vdots \\ (a_k - a_{k-1})(x-(k-1)) + a_{k-1} \ (k-1 \leqq x < k) \\ \vdots \\ (a_n - a_{n-1})(x-(n-1)) + a_{n-1} \ (n-1 \leqq x \leqq n) \end{cases}$$

この $f(x)$ は $a_k > a_{k-1}$ より各区間において単調増加であり各区間においては連続

また、各区間の端点において同一の値を持つので全区間で連続である。

よって各区間単調増加で全区間で連続なので、全区間で単調増加である。

次に、(1)

$a_1 \geqq 0$ なら、$a_k \geqq 0 (k > 1)$

(1) の左辺 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqq 0$

しかしすべては 0 でないので少なくとも一つ 0 でない a_k が存在することになり $a_1 + a_2 + \cdots + a_n > 0$

しかし、これは前提 (1) に反するので

$$a_1 < 0 \tag{3}$$

同様に、$a_n \leqq 0$ とすると $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 0$

となり、やはり前提 (1) に反するので

$$a_n > 0 \tag{4}$$

区間 $[1 \leqq x \leqq n]$ で考えたとき $f(1) = a_1 < 0$ かつ $f(n) = a_n > 0$ なので中間値の定理により $f(y) = 0$ となる実数 $y(1 < y < n)$ が存在する。((3) と (4) より $y = 1, y = n$ の場合あり得ない)

そのとき y は実数で、$(1 < y < n)$ であるから $k \leqq y < k+1$ となる整数 $k(1 \leqq k < n)$ が存在する。

そのとき、$f(x)$ は単調増加なので $f(k) \leqq f(y) = 0 \leqq f(k+1)$ となる。

従って、$a_k \leqq 0 \leqq a_{k+1}$

よって推移律より $a_i \leqq 0 \ (1 \leqq i \leqq k)$

同様に $a_j \geqq 0 \ (k+1 \leqq j \leqq n)$

以下 k をこのような整数とする。

次に、$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n$ を考えるとこの式は

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(a_2+2a_3+\cdots+(n-1)a_n) \tag{5}$$

と変形できる。
(2) より

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(a_2+2a_3+\cdots+(n-1)a_n)=(a_2+2a_3+\cdots+(n-1)a_n) \tag{6}$$

おなじ変形を行うことで

$$(a_2+a_3+\cdots+a_n)+(a_3+2a_4\cdots+(n-2)a_n) \tag{7}$$

となり、これを繰り返すことで

$$(a_2+a_3+\cdots+a_n)+\quad(a_3+a_4\cdots+a_n)+\quad\cdots+(a_k+a_{k+1}+\cdots+a_n)+\cdots+\quad+a_n \tag{8}$$

となる。
(2) より、

$$\begin{aligned} a_2+a_3+\cdots+a_n &= -a_1 \\ a_3+\cdots+a_n &= -(a_1+a_2) \\ &\vdots \\ a_{k+1}+\cdots+a_n &= -(a_1+a_2+\cdots+a_k) \end{aligned}$$

なので、(8) を

$$-(a_1+(a_1+a_2)+\cdots+(a_1+a_2+\cdots+a_k))+(a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_n)+\cdots+a_n \tag{9}$$

と書き換えられる。
このとき $a_1,\cdots,a_k$ はすべて $\leqq 0$ なので

$$a_1+(a_1+a_2)+\cdots+(a_1+a_2+\cdots+a_k)\leqq 0$$

また $a_{k+1},\cdots,a_n$ はすべて $\geqq 0$ なので

$$(a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_n)+\cdots+a_n\geqq 0$$

また、すべてが 0 ではないので

$$a_1+(a_1+a_2)+\cdots+(a_1+a_2+\cdots+a_k)<0$$

または

$$(a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_n)+\cdots+a_n>0$$

従って

$$-(a_1+(a_1+a_2)+\cdots+(a_1+a_2+\cdots+a_k))+(a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_n)+\cdots+a_n>0 \tag{10}$$

よって

$$a_1+2a_2+\cdots+na_n>0$$

証明終了