京都大学　1990 年　入学試験　前期理系数学　問題 2

問題

三角形 ABC において，$\angle B = 60°$，B の対辺の長さ b は整数，他の 2 辺の長さ a，c はいずれも素数である．このとき三角形 ABC は正三角形であることを示せ．

解答

三角形 ABC の B の対辺の長さが b A の対辺 $\overline{BC}$ のを長さ a,C の対辺 $\overline{AB}$ を c とする。
A から BC に下した垂線の脚を H とするとき $\overline{BH}$ の長さを h とし垂線の長さを l とする。$\angle B = 60°$ なので
$h = c/2$
$\overline{HC}$ の長さは $a - c/2$ となる。

そのとき、

$$b^2 = l^2 + (a - c/2)^2$$

$$l^2 = c^2 - (c/2)^2$$

従って

$$b^2 = c^2 - (c/2)^2 + (a - c/2)^2$$

整理すると

$$b^2 = c^2 - ac + a^2$$

$$b^2 = (c - a)^2 + ac$$

この式を変形すると

$$b^2 - (c - a)^2 = ac$$

となり

$$(b - (c - a))(b + (c - a)) = ac$$

となる。
a, b, c は整数で、かつ、a,c は素数なので右辺は $(1, ac), (a, c), (-1, -ac), (-a, -c)$ にしか分解されない
従って

$$\begin{cases} b - c + a = a \\ b + c - a = c \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} b - c + a = c \\ b + c - a = a \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} b - c + a = 1 \\ b + c - a = ac \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} b - c + a = ac \\ b + c - a = 1 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} b-c+a=-a \\ b+c-a=-c \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} b-c+a=-c \\ b+c-a=-a \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} b-c+a=-1 \\ b+c-a=-ac \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} b-c+a=-ac \\ b+c-a=-1 \end{cases} \tag{8}$$

のどれか成立する。

(1) の場合

$$b-c=0$$
$$b-a=0$$

従って、

$$b=c$$
$$b=a$$

推移律より

$$a=c$$

従って、三角形 ABC は正三角形

(2) の場合

$$b=2c-a$$
$$b+c=2a$$

となり

$$3c=3a$$

従って

$$c=a$$

2 辺が等しく、挟角が 60° なので三角形 ABC は正三角形

(3) の場合

$$b-c+a=1$$
$$b+c-a=ac$$

より $a \neq 2$ の場合は

$$c=\frac{1-2a}{a-2}$$

a, c は素数なので、$a \geq 2, c \geq 2$ 従って、$1 - 2a < 0$ しかし、$c > 0$ なので、$a - 2 < 0$ しかし、これは成立しない。$a = 2$ の場合は

$$b = c - 1$$
$$b = c + 2$$

となり

$$c + 2 = c - 1$$

となりこれも成立しない。したがって、(3) の場合はあり得ない
同様に (4) も

$$b - c + a = ac \tag{9}$$
$$b + c - a = 1 \tag{10}$$

より
$c \neq 2$ の場合

$$a = \frac{1 - 2c}{c - 2} \tag{11}$$

となるが、同様に成立しない
$c = 2$ の場合も同様
(5) の場合

$$b - c + a = -a \tag{12}$$
$$b + c - a = -c \tag{13}$$
$$3c = 3a \tag{14}$$

より

$$a = c$$

(2) の場合と同様、三角形 ABCD は正三角形

(6) の場合

$$b - c + a = -c \tag{15}$$
$$b + c - a = -a \tag{16}$$

より

$$a = c \tag{17}$$

となり同様に、三角形 ABCD は正三角形
(7) の場合

$$b - c + a = -1 \tag{18}$$
$$b + c - a = -ac \tag{19}$$

より $c \neq 2$ の場合は

$$a = \frac{2c - 1}{2 - c} \tag{20}$$

となるが、(3) 同様に成立しない
$c=2$ の場合も (3) 同様成立しない
(8) の場合

$$b-c+a=-ac \tag{21}$$
$$b+c-a=-1 \tag{22}$$

より $a \neq 2$ の場合は

$$c=\frac{2a-1}{2-a} \tag{23}$$

となり、(4) 同様に成立しない
$a=2$ の場合も (4) 同様成立しない

従って、(1),(2),(5),(6) の場合のみあり得て
どの場合でも、三角形 ABCD は正三角形