京都大学　1993 年　入学試験　後期理系数学　問題 4

問題

$a$ は正の定数とする．不等式 $a^x \geqq ax$ がすべての正の数 $x$ について成り立つという．このとき $a$ はどのようなものか.

解答

$$f(x) = a^x - ax \tag{1}$$
$$g(x) = a^x \tag{2}$$

とする。

$a < 1$ の場合

$g(x) = a^x$ を微分すると

$$g'(x) = a^x \ \log \ a$$

$log\ a < 0$ より $g(x) = a^x$ は単調減少

したがって、$x > 0$ のの範囲で $g(x) = a^x < 1 = g(0)$

しかし、$ax$ は任意の $a > 0$ において $ax > 1$ となる $x$ をとることができる。

具体的には $x > 1/a$

したがってその様な $x$ においては $a^x < ax$ となるため

$a < 1$ の場合は、$a^x \geqq ax$ が成立しない $x$ が存在する。

$a = 1$ の場合

任意の $x$ において $a^x = 1$ となり

$x > 1$ において、$1 = a^x < ax = x$ となり $a = 1$ の場合は、$a^x \geqq ax$ が成立しない $x$ が存在する。

$a > 1$ の場合

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = a^x \ \log \ a - a$$

$f'(x)$ を微分すると

$$f''(x) = a^x \ (log\ a)^2$$

となり、$a > 1$ より $a^x\ (log\ a)^2 \geq 0$ したがって、$f'(x)$ は単調増加—(a)

$a > 1$ の場合なので、$a \geqq 1$ のみ考慮すれば十分

$a = 1$ のとき $\log\ a - a = -1$

$a > 1$ のとき

$$f_a(x) = \log\ x - x$$

とおいて $f_a(x)$ を微分すると

$$f_a'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

$x \geqq 1$ の範囲で $f_a'(x) \leq 0$ したがって $f_a(x)$ は $x \geqq 1$ の範囲で単調減少 $f_a(1) = -1$ より $f_a(x) \leqq -1$ したがって、$f_a(x)$ は $x > 0$ の範囲で負

よって任意の $a$ に対して $f(0) < 0$
$f'(x)$ は連続だから、中間値の定理より
$x > 0$ の範囲に $f'(t) = 0$ となる $t$ が存在する。

$$t = \frac{\log\left(\frac{a}{\log\ a}\right)}{\log\ a}$$

このとき (a) より $f'(x)$ は単調増加だから

$$0 < x \leqq t \tag{3}$$

の範囲では

$$f'(x) < 0$$

$$x \geqq t \tag{4}$$

の範囲では

$$f'(x) > 0$$

したがって
(3) の範囲では $f(x)$ は単調減少
(4) の範囲では $f(x)$ は単調増加

よって、$f(x)$ は
(3) の範囲では $x = t$ において最小となり
(4) の範囲でも $x = t$ において最小となる
したがって、
$x > 0$ の範囲で $f(x)$ は $x = t$ において最小となる
そのときの値が 0 より大きいかひとしければ $x > 0$ のすべての範囲で $f(x) \geqq 0$ がいえる。

次に

$$f(t) \geqq 0 \tag{5}$$
$$f'(t) = 0 \tag{6}$$

より

$$a^t \log\ a - a = 0$$
$$a^t = \frac{a}{\log\ a}$$

$$f(t) = a^t - at$$
$$= \frac{a}{\log\ a} - at \geq 0$$

$a > 1$ より $\log\ a > 0$ であるから

$$a \geqq at \log\ a$$

$$t = \frac{\log\left(\frac{a}{\log\ a}\right)}{\log\ a}$$

より

$$a \geqq a \log\left(\frac{a}{\log\ a}\right)$$

$a > 1$ であるから

$$1 \geqq \log\left(\frac{a}{\log\ a}\right)$$

指数関数は単調増加なので

$$e^1 \geqq e^{\log\left(\frac{a}{\log\ a}\right)} \tag{7}$$
$$\frac{a}{\log\ a} \leqq e \tag{8}$$

$$h(x) = \frac{x}{\log\ x}$$

として $h(x)$ を微分すると

$$h'(x) = \frac{\log\ x - 1}{(\log\ x)^2} \tag{9}$$

分母は常に正したがってこの式の正負は分子によって決まる。分子 $\log\ x - 1$ は、$0 < x < e$ の範囲で負、$x > e$ の範囲で正となるので関数 $h(x)$ は $0 < x < e$ の範囲で単調減少、$x > e$ の範囲で単調増加となるので、$x = e$ のとき最小値をとりそのときの値は $h(x) = e$ となる。したがって、$h(x)$ は $0 < x$ の区間で $h(x) \geqq e$
(8) が成り立つためには $(h(x) \leqq e$ かつ、$h(x) \geqq e$ なので
$x = e$ のときのみ問題の不等式等式は成立する。
よって、問題の不等式がすべての $x > 0$ の範囲で成立する $a$ は

$$a = e$$

にかぎる。