京都大学　1995 年　入学試験　前期理系数学　問題 2

問題

a，b は $a > b$ をみたす自然数とし，p，d は素数で $p > 2$ とする。このとき，$a^p - b^p = d$ であるならば，d を $2p$ で割った余りが 1 であることを示せ。

解答

$$a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + a^{p-3}b^2 + \cdots + b^{p-1}) = d$$

d は素数なので

$$\begin{cases} (a-b) = d \\ (a^{p-1} + a^{p-2}b + a^{p-3}b^2 + \cdots + b^{p-1}) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

または

$$\begin{cases} (a-b) = 1 \\ (a^{p-1} + a^{p-2}b + a^{p-3}b^2 + \cdots + b^{p-1}) = d \end{cases} \tag{2}$$

のいずれかにしか因数分解できない。
$a \geqq 2$ かつ $b \geqq 1$,$p > 2$ なので

$$a^{p-1} + a^{p-2}b + a^{p-3}b^2 + \cdots + b^{p-1} > a^{p-1} \geqq 2^2 = 4 \tag{3}$$

より (1) の場合はあり得ない
(2) の場合 $a - b = 1$ より $b = a - 1$
したがって

$$d = a^p - b^p = a^p - (a-1)^p = (-1)^{p-1}\binom{p}{1}a^{p-1} + (-1)^{p-2}\binom{p}{3}a^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1}a - (-1)^p$$

$\displaystyle\binom{p}{n} = \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}(0 < n < p)$ は p で割り切れ
$p > 2$ は奇数なので $-(-1)^p = 1$ だから
d を p で割ったあまりは 1
(3) より、$d > 3$ なので d は 2 より大きい素数であるから奇数である。
よって 2 で割ったあまりは 1
以上より $d = 2n + 1$ かつ $d = mp + 1$ となる整数 m, n が存在し $2n + 1 = mp + 1$ より $2n = mp$
しかし p は素数で $p > 2$ なので n が p で割り切れなければならない
つまり、$n = lp$ となる整数 l が存在する。
したがって $d = 2pl + 1$ となり
d を $2p$ で割った余りは 1