京都大学　1996 年　入学試験　後期理系数学　問題 2

問題

m，n は自然数で，$m < n$ をみたすものとする．$m^n + 1$，$n^m + 1$ がともに 10 の倍数となる m，n を 1 組与えよ．

解答

$$\begin{cases} m^n \equiv 9 \pmod{10} \\ n^m \equiv 9 \pmod{10} \end{cases} \tag{1}$$

となる
10 を素因数分解すると 2×5
よって

$$\begin{aligned} m^n &\equiv 1 \pmod 2 \\ m^n &\equiv 4 \pmod 5 \\ n^m &\equiv 1 \pmod 2 \\ n^m &\equiv 4 \pmod 5 \end{aligned}$$

したがって、m, n は $2, 5$ の倍数ではない–(A)
m を 10 進展開したとき m が i 桁の数であるとすると

$$m = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + \cdots + 10^i a_i (a_0, \cdots, a_i \text{は} 1 \text{桁の数})$$

としたとき

$$m^n = a_0^n + \cdots + 10^{in} a_i^n$$

となり 2 項目以降は 10 で割り切れるので

$$m^n \equiv a_0^n \pmod{10}$$

同様に

$$m^n \equiv b_0^m \pmod{10}$$

したがって, 最下位の桁の m, n 乗のみ考えればよい
(A) より最下位の桁は $1, 3, 7, 9$ に限られる。
また 1 は何乗しても 1 なので $3, 7, 9$ に限られる。

m, n とも奇数なので m の最下位桁を 3,$n = 2j + 1$ とおく
$3^{2j+1} = 3(3^2)^j = 3(9)^j$ となるので

$$9^j \equiv (10-1)^j \equiv (-1)^j \pmod{10}$$

より

$$3^{2j+1} \equiv 3 \times (-1)^j \pmod{10}$$

となり

$$3^{2j+1} \equiv 3, -3 \not\equiv 9 \pmod{10}$$

となって、最下位の桁は 3 ではない
同様に $7^{2j+1} = 7(7^2)^j = 7(49)^j$ より

$$49^j \equiv (50-1)^j \equiv (-1)^j \pmod{10}$$

となり

$$7^{2j+1} \equiv 7, -7 \not\equiv 9 \pmod{10}$$

したがって、最下位の桁は 7 ではない
よって、最下位の桁は 9 に限られるので考えられる数の組は $(m, n) = (9, 19), (9, 29), \cdots$ となる
このなかで $(9, 19)$ を検証してみると

$$9^{19} \equiv (10-1)^{19} \equiv (-1)^{19} \equiv -1 \equiv 9$$

$$19^9 \equiv (20-1)^9 \equiv (-1)^9 \equiv -1 \equiv 9$$

となり、
$9^{19} + 1, 19^9 + 1$ ともに 10 の倍数となる。
したがって、この求める組のうちの一つは

$$(9, 19)$$

任意の整数 $1 \leqq i < j$ について $m = 10i + 9, n = 10j + 9$ とおいた時

$$m^n = (10i+9)^{10j+9} \equiv (9)^{10j+9} \equiv (-1)^{10j+9} \equiv -1 \equiv 9$$

$$n^m = (10j+9)^{10i+9} \equiv (9)^{10i+9} \equiv (-1)^{10i+9} \equiv -1 \equiv 9$$

となり、m, n はこの条件を満たす。
また、逆にこの形以外ではこの条件を満たすことはできないことは証明より明らか
したがって $m^n + 1, n^m + 1$ が共に 10 の倍数であるためには

$$m = 10i + 9, n = 10j + 9 (1 \leqq i < j)$$

であることが必要十分である。