京都大学　1997 年　入学試験　後期理系数学　問題 2

問題

自然数 n と n 項数列 $a_k\ (1 \leqq k \leqq n)$ が与えられていて，次の条件（イ），（ロ）を満たしている．

（イ）　$a_k\ (1 \leqq k \leqq n)$ はすべて正整数で，すべて 1 と $2n$ の間にある，$1 \leqq a_k \leqq 2n$.

（ロ）　$s_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{j} a_k$ とおくとき，$s_j\ (1 \leqq j \leqq n)$ はすべて平方数である．（整数の 2 乗である数を平方数という．）

このとき

1. $s_n = n^2$ であることを示せ.
2. $a_k\ (1 \leqq k \leqq n)$ を求めよ.

解答

$s_k = b_k^2$ となる数列 b_k を考える

s_k は平方数なので $s_k = t^2$ となる整数 t が存在し $t = \pm\sqrt{s_k}$

ここでは $t > 0$ の場合のみを考えても問題は無いので $b_k \geqq 0$ とする。

$s_k = b_k^2$ なので

$$a_l = s_l - s_{l-1} = b_l^2 - b_{l-1}^2 = (b_l - b_{l-1})(b_l + b_{l-1})$$

$a_k > 0$ より

$(b_l - b_{l-1})(b_l + b_{l-1}) > 0$ となり

$b_l > 0$ より

$b_l + b_{l-1} > 0$

したがって

$b_l - b_{l-1} > 0$

よって b_k は増加数列

したがって

$b_1 > 0$ より $b_1 \geqq 1$ であり

すべての $k(1 \geqq k \geqq n)$ において

$b_k \geqq k$

したがって

$$(b_n - b_{n-1})(b_n + b_{n-1}) \geqq (b_n - b_{n-1})(2n-1)$$

しかし

$$a_n = (b_n - b_{n-1})(b_n + b_{n-1}) \leqq 2n$$

なので

$$(b_n - b_{n-1})(2n-1) \leqq 2n$$

$2n - 1 \geqq 1$ なので

$$b_n - b_{n-1} \leqq \frac{2n}{2n-1} = 1 + \frac{1}{2n-1}$$

$n = 1$ の場合 $a_1 \leqq 2$

$s_1 = a_1$

s_1 が平方数であるためには $s_1 = 1$
よって

$$a_1 = 1$$

$n > 1$ の場合

$$\frac{1}{2n-1} \leqq \frac{1}{3}$$

したがって

$$b_n - b_{n-1} \leqq 1 + \frac{1}{3}$$

$b_n - b_{n-1}$ は正の整数で $b_n - b_{n-1} > 0$ なので $b_n - b_{n-1} = 1$
つまり
$b_n = b_{n-1} + 1$
よって

$$a_n = 2b_n - 1$$

また

$$a_n \leqq 2n$$

より

$$\begin{aligned} 2b_n - 1 &\leqq 2n \\ 2b_n &\leqq 2n + 1 \\ b_n &\leqq n + 1/2 \end{aligned}$$

$b_k \geqq k$
より

$$n \leqq b_n \leqq n + 1/2$$

よって $b_n = n$
よって

$$s_n = b_n^2 = n^2$$

また $b_k - b_{k-1} = 1$ なので $b_{n-1} = n - 1$
これを繰り返して

$$b_k = k (1 \leqq k \leqq n)$$

したがって

$$a_k = 2k - 1 \ \ (1 \leqq k \leqq n)$$