京都大学　1997 年　入学試験　前期理系数学　問題 2

問題

　n が相異なる素数 p, q の積, $n = pq$, であるとき, $(n-1)$ 個の数 ${}_n\mathrm{C}_k$ $(1 \leqq k \leqq n-1)$ の最大公約数は 1 であることを示せ.

解答

$$t_k = {}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

とおく

$k = 1$ の時

$$t_1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$$

$k = n-1$ の時

$$t_{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-n+1)!} = n$$

n は素数 p, q の積なので n の約数は $n, p, q, 1$

したがって、t_k の最大公約数は $n, p, q, 1$ のいずれかである。

$$t_p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$$

n は pq なので n より小さい最大の p の倍数は $p(q-1) = pq - p = n - p$ したがって、n から始まって連続する p 個の積 $n(n-1)\cdots(n-p+1)$ の中には p の倍数は n のみしか存在しない。

また n の約数には p は 1 個のみ含まれる。

しかし $p!$ には当然 p が 1 個含まれるので

$$t_p = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$$

は p で割り切れない

同様に

$$t_q = \frac{n(n-1)\cdots(n-q+1)}{q!}$$

は q で割り切れない

t_k の最大公約数は t_1, t_p, t_q の約数なので

(t_1, t_p, t_q) の約数

t_p は t_1 の約数 $n, p, q, 1$ のうち n, p を含まない

同様に t_q は t_1 の約数 $n, p, q, 1$ のうち n, q を含まない

したがって t_1, t_p, t_q に共通に含まれる約数は 1 のみ

つまり $(t_1, t_p, t_q) = 1$

よって t_k の最大公約数は 1