京都大学　1999年　入学試験　前期理系数学　問題5

問題

以下の問に答えよ．ただし，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$ が無理数であることは使ってよい．

1. 有理数 p，q，r について，

$$p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}=0$$

ならば，$p=q=r=0$ であることを示せ．

2. 実数係数の2次式

$$f(x)=x^2+ax+b$$

について，$f(1)$，$f(1+\sqrt{2})$，$f(\sqrt{3})$ のいずれかは無理数であることを示せ．

解答

1.

p,q,r が0であるか無いかによって場合を分けると

$$p \neq 0, q \neq 0, r \neq 0 \tag{1}$$
$$p = 0, q \neq 0, r \neq 0 \tag{2}$$
$$p \neq 0, q = 0, r \neq 0 \tag{3}$$
$$p \neq 0, q \neq 0, r = 0 \tag{4}$$
$$p = 0, q = 0, r \neq 0 \tag{5}$$
$$p = 0, q \neq 0, r = 0 \tag{6}$$
$$p \neq 0, q = 0, r = 0 \tag{7}$$
$$p = 0, q = 0, r = 0 \tag{8}$$

に場合分けされる

以下それぞれの場合について考える。

$p \neq 0, q \neq 0, r \neq 0$ とすると

$$p=-\left(q\sqrt{2}+r\sqrt{3}\right)$$

両辺を2乗すると

$$p^2=2q^2+2qr\sqrt{6}+3r^2$$

$p \neq 0, q \neq 0, r \neq 0$ より

$$\frac{p^2-2q^2-3r^2}{2qr}=\sqrt{6}$$

左辺は有理数の四則演算で構成されているので有理数
しかし右辺は $\sqrt{6}$ で無理数であり
左辺が有理数であることに反する。
よってこの場合はあり得ない

$p=0, q \neq 0, r \neq 0$ の場合

$$q\sqrt{2}+r\sqrt{3}=0$$

となり

$$q\sqrt{2} = -r\sqrt{3}$$

両辺に $\sqrt{3}$ をかけて

$$q\sqrt{2}\sqrt{3} = -3r$$

両辺を q で割ると

$$\sqrt{6} = -3r/q$$

となるが、右辺は有理数であり、左辺が無理数であることに反する
よってこの場合はありえない

$p \neq 0, q = 0, r \neq 0$ の場合

$$p + r\sqrt{3} = 0$$

となり

$$\sqrt{3} = -\frac{p}{r}$$

となるが右辺は有理数、左辺が無理数であることに反する
よってこの場合はありえない

$p \neq 0, q \neq 0, r = 0$ の場合

$$p + q\sqrt{2} = 0$$

となり

$$\sqrt{2} = -\frac{p}{q}$$

となるが右辺は有理数、左辺が無理数であることに反する
よってこの場合はありえない

$p = 0, q = 0$ の場合

$$r\sqrt{3} = 0$$

となり $r = 0$

$p = 0, r = 0$ の場合

$$q\sqrt{2} = 0$$

となり $q = 0$

$q = 0, r = 0$ の場合

$$p = 0$$

となり $p = 0$

以上より、(1)(2),(3),(4) の場合はあり得ない
(5),(6),(7) の場合はすべて $p = q = r = 0$
(8) の場合は $p = q = r = 0$
よって

$$p = q = r = 0$$

2.

$f(x) = x^2 + ax + b$ において

$$
\begin{aligned}
p &= f(1) = 1 + a + b &(9)\\
q &= f(1+\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2} + a + a\sqrt{2} + b &(10)\\
r &= f(\sqrt{3}) = 3 + a\sqrt{3} + b &(11)\\
& &(12)
\end{aligned}
$$

とおき p, q, r がすべて有理数であると仮定する。

$$
\begin{aligned}
q &= 2\sqrt{2} + a\sqrt{2} + 3 + a + b\\
&= a\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2 + p
\end{aligned}
$$

であるから

$$(a+2)\sqrt{2} + 2 + p - q = 0$$

$$a = \frac{2+p-q}{\sqrt{2}} - 2$$

$$b = \frac{2+p-q}{\sqrt{2}} - 1 - p$$

を $r = 3 + a\sqrt{3} + b$ に代入すると

$$
\begin{aligned}
r &= 4 + a(1+\sqrt{3}) - p\\
&= 4 + (1+\sqrt{3})\frac{2+p-q}{\sqrt{2}} - p\\
&= 4 + (\sqrt{2}+\sqrt{6})\frac{2+p-q}{2} - p
\end{aligned}
$$

から $2 + p - q \neq 0$ の時

$$\frac{2(r+p-4)}{(2+p-q)} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$$

となる。両辺を 2 乗して

$$\left(\frac{2(r+p-4)}{(2+p-q)}\right)^2 = 8 + 2\sqrt{3}$$

$$\frac{\left(\frac{2(r+p-4)}{(2+p-q)}\right)^2}{2} - 4 = \sqrt{3}$$

となるが、左辺は有理数の四則演算で構成されているので有理数

しかし右辺が無理数であることに矛盾する。

$2 + p - q = 0$ のとき

$$(a+2)\sqrt{2} + 2 + p - q = 0$$

より

$$a = -2$$

$p = 1 + a + b$ が有理数であるから

$b = p - 1 - a = p + 1$ は有理数
したがって

$$\begin{aligned} r &= 3 + a\sqrt{3} + b \\ &= 4 - 2\sqrt{3} + p \end{aligned}$$

より

$$\frac{p - r + 4}{2} = \sqrt{3}$$

となり、左辺は有理数となり、右辺が無理数であることに矛盾する。

以上より $f(1), f(1+\sqrt{2}), f(\sqrt{3})$ がすべて有理数であることはない