京都大学　2000 年　入学試験　前期理系数学　問題 4

問題

p を素数，a，b を互いに素な正の整数とするとき，$(a+bi)^p$ は実数ではないことを示せ．ただし i は虚数単位を表す．

解答

$p=2$ の時

$$(a+bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$$

a, b は正なので $2ab > 0$
よって実数ではない。

$p \geqq 3$ の時

$$(a+bi)^p = a^p + \binom{p}{1}a^{p-1}bi - \binom{p}{2}a^{p-2}b^2 - \binom{p}{3}a^{p-3}b^3 i + \cdots + b^p i^p$$

この値が実数になるには
虚数項の係数

$$B = \binom{p}{1}a^{p-1}b - \binom{p}{3}a^{p-3}b^3 + \cdots + (-1)^{\frac{p-1}{2}}b^p$$

が 0 になることが必要十分
B を b で整理すると

$$B = b\left(\binom{p}{1}a^{p-1} - \binom{p}{3}a^{p-3}b^2 + \cdots + (-1)^{\frac{p-1}{2}}b^{p-1}\right)$$

$b \neq 0$ なので $B=0$ となるためには

$$\binom{p}{1}a^{p-1} - \binom{p}{3}a^{p-3}b^2 + \cdots + (-1)^{\frac{p-1}{2}}b^{p-1} = 0$$

第 2 項以降を b で整理すると

$$\binom{p}{1}a^{p-1} + b\left(-\binom{p}{3}a^{p-3}b + \cdots + (-1)^{\frac{p-1}{2}}b^{p-2}\right) = 0$$

第 2 項以降を右辺に移項してまた $\binom{p}{1} = p$ なので

$$pa^{p-1} = -b\left(-\binom{p}{3}a^{p-3}b + \cdots + (-1)^{\frac{p-1}{2}}b^{p-2}\right)$$

しかし、b は a とは互いに素
したがって $b=p$ でなければならない
そこで両辺を $p=b$ で割って書き直すと

$$a^{p-1} = -\left(-\binom{p}{3}a^{p-3}p + \cdots + (-1)^{\frac{p-1}{2}}p^{p-2}\right)$$

となるが
右辺を p で整理すると

$$a^{p-1} = -p\left(-\binom{p}{3}a^{p-3} + \cdots + (-1)^{\frac{p-1}{2}}p^{p-3}\right)$$

p は素数なので
a^{p-1} は p を因数として含むことになる
したがって a は p を因数として含む
しかし今 $b = p$ なのでこれは a, b が互いに素という前提に反する
したがって $B \neq 0$
以上より虚数項の係数が 0 にならないので $(a + bi)^p$ は実数ではない

証明終了