京都大学　2002 年　入学試験　前期理系数学　問題 3

問題

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ は整数を係数とする x の 4 次式とする．4 次方程式 $f(x)=0$ の重複も込めた 4 つの解のうち，2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという．このとき a，b，c の値を求めよ．

解答

四つの解をそれぞれ (m,n,α,β) とする。
m,n は整数,α,β は虚数
$\alpha=p+qi,\beta=r+si$ とする。
このとき $f(x)$ は $(x-m)(x-n)(x-\alpha)(x-\beta)$ の形に表される。
したがって
$f(x)=x^4+(-\alpha-\beta-n-m)x^3+(mn+(m+n)(\alpha+\beta)+\alpha\beta)x^2+(-(\alpha+\beta)mn-\alpha\beta(m+n))x+mn\alpha\beta$
したがって

$$
\begin{aligned}
a&=-\alpha-\beta-n-m\\
b&=mn+(m+n)(\alpha+\beta)+\alpha\beta\\
c&=-(\alpha+\beta)mn-\alpha\beta(m+n)\\
1&=mn\alpha\beta
\end{aligned}
$$

a,b,c,m,n は整数なので $\alpha+\beta=-a-n-m$ は整数
よって $\alpha+\beta$ の虚数項は 0 なので $q=-s$
また $mn\alpha\beta=1$ なので
$\alpha\beta=pr-qs+(ps+rq)i$ が有理数となり
$ps+rq=ps-rs=s(p-r)=0$
$s=0$ だと α,β が虚数にならないので、$s\neq 0$ であり、$p=r$
したがって α と β は共役
$\alpha+\beta=2p$
$\alpha\beta=p^2+q^2$ となる $a=-2p-n-m$
$b=mn+2p(m+n)+p^2+q^2$
$c=-2pmn-(p^2+q^2)(m+n)$
$1=-mn(p^2+q^2)$
$2p=-a-n-m$ より $2p$ は整数。
よって $b-mn-2p(m+n)=p^2+q^2$ より p^2+q^2 も整数
$mn(p^2+q^2)=1$ より
$mn(p^2+q^2)=1$ より
m,n,p^2+q^2 はすべて 1 または -1
しかし $p^2+q^2>0$ なので $p^2+q^2=1$
よって $p^2+q^2=1$
つまり $mn=1$
$a=-2p-n-m$
$b=1+2p(m+n)+1$
$c=-2p-(m+n)$
となり $a=c$

$2p$ が整数なので $2p=k$(k は整数) と表せる。

m,n の組は $(m,n)=(1,1),(-1,-1)$ の 2 通りが考えられる。

$(m,n)=(1,1)$ のとき $m+n=2$ より

$a=-k-2$

$b=2k+2$

$(m,n)=(-1,-1)$ のとき $m+n=-2$ より

$a=-k+2$

$b=-2k+2$

$p^2+q^2=1$ より

$p^2+q^2=1$ より $|p|\leqq 1$ となるが

$p=1$ のとき $q=0$ となり α,β が虚数ではなくなるので $|p|\neq 1$

よって

$k=-1,0,1$ のいずれか

よって a,b,c の組は

$(m,n,k)=(1,1,-1)\to(a,b,c)=(-1,0,-1)$

$(m,n,k)=(1,1,0)\to(a,b,c)=(-2,2,-2)$

$(m,n,k)=(1,1,1)\to(a,b,c)=(-3,4,-3)$

$(m,n,k)=(-1,-1,-1)\to(a,b,c)=(3,4,3)$

$(m,n,k)=(-1,-1,0)\to(a,b,c)=(2,2,2)$

$(m,n,k)=(-1,-1,1)\to(a,b,c)=(1,0,1)$

よって a,b,c の組は

$$(-1,0,-1),(-2,2,-2),(-3,4,-3),(3,4,3),(2,2,2),(1,0,1)$$