京都大学　2002 年　入学試験　前期理系数学　問題 6

問題

$0 < \theta < 90$ とし，a は正の整数とする．複素数平面上の点 $z_0, z_1, z_2, \cdots$ をつぎの条件 (i)，(ii) を満たすように定める．
(i) $z_0 = 0$，$z_1 = a$
(ii) $n \geqq 1$ のとき，点 $z_n - z_{n-1}$ を原点のまわりに
θ° 回転すると点 $z_{n+1} - z_n$ に一致する．

このとき点 z_n $(n \geqq 1)$ が点 z_0 と一致するような n が存在するための必要十分条件は，θ が有理数であることを示せ．

解答

点 $p_k = z_k - z_{k-1}$　$(0 < k)$ とすると、
$p_1 = a$
p_k は p_{k-1} を原点を中心に θ° 回転したものであるから
p_k の長さ $\overline{p_k}$ は $\overline{p_{k-1}}$ と等しい
したがって、p_k は 0 を中心として半径 a の円周上等角度でならぶ
z_n が $z_0 = 0$ に一致する n が存在したときその一つを t とすると
$z_t = 0 = p_1 + p_2 + \cdots + p_t$ となる
そのとき、点 $z_0, z_1, \cdots, z_t$ を順に直線で結ぶと t 角形となる
また各点 $z_k(1 < k < t)$ の内角は $(180 - \theta)^\circ$ となる。さて、この t 角形の内角の和は $(180 - \theta)t$ となる
d_k を以下のように定義する
中心点からみて z_k が z_{k-1} から時計周りであるばあいを -1
反時計周りである場合を 1
z_k, z_{k-1} と 0 が一直線上にならぶ場合を 0
すべての k について d_k は定義できる。
t 角形の内角の和は

$$\sum_{k=1}^{t} 180 d_k$$

(反時計周りの場合は、$0, z_k, z_{k-1}$ を頂点とする三角形の内角の和を加算し
時計周りの場合はそれを減算し、１直線の場合は内角の和を操作しない)
と定義できる。

したがって、この式で d_k が 1 となる回数から -1 となる回数を引いた数を l とすると
内角の和は $180l$(l は整数) と表せる。
したがって
$(180 - \theta)t = 180l$
$\theta = \frac{180(l-t)}{t}$
となり、
θ は有理数
逆に

θ が有理数であった場合 $\theta = \frac{m}{n}$ とすると
$t\frac{m}{n} = 360l$ となる t, l を 1 組とってくると
(例えば $t = 360n, l = m$ とする)
p_k は k が 1 増える毎に $\frac{m}{n}$ 度回転するので
$\angle p_1 O p_k = (k-1)\frac{m}{n}$
$p_{t+1} = t\frac{m}{n} = 360l$ となって
p_k は $k = t+1$ において、p_1 に一致する。
このとき、点 p_k は $x^t - a^t = 0$ の解
したがって

$$\begin{aligned} x^t - a^t &= (x-p_1)(x-p_2)\cdots(x-p_t) \\ &= x^t - (p_1 + p_2 + \cdots + p_t)x^{t-1} + \cdots + (p_1 p_2 \cdots p_t) \end{aligned}$$

がすべての x について成り立つ
よって x^{t-1} の係数は 0
したがって

$$\sum_{k=1}^{t} p_k = 0$$

となり

$$z_t = \sum_{k=1}^{t} p_k = 0$$

より $z_t = 0 = z_0$ したがって、$z_n = z_0$ となる n が存在する。