

問題

N を自然数とする。 $N + 1$ 個の箱があり、1 から $N + 1$ までの番号が付いている。

どの箱にも玉が 1 個入っている。

番号 1 から N までの箱に入っている玉は白玉で、番号 $N + 1$ の箱に入っている玉は赤玉である。次の操作 $(*)$ を、おのその $k = 1, 2, \dots, N + 1$ に対して、 k が小さい方から順番に 1 回ずつ行う。

$(*)$ k 以外の番号の N 個の箱から 1 個の箱を選び、その箱の中身と番号 k の箱の中身を交換する。(ただし、 N 個の箱から 1 個の箱を選ぶ事象は、どれも同様に確からしいとする。)

操作がすべて終了した後、赤玉が番号 $N + 1$ の箱に入っている確率を求めよ。

解答

操作を $k = 1, \dots, N$ までと $k = N + 1$ に分けて考える。

$k = n (1 \leq n \leq N)$ のときの操作によって n 番の箱と $N + 1$ 番の箱の中身が交換される確率は $1/N$ したがってこの操作で交換されない確率は $(N - 1)/N$ となる。

これが N 回繰り返されるので、

(A) $N + 1$ 番の箱が $k = 1, \dots, N$ までの操作で一度も交換されない確率は

$$\left(\frac{N-1}{N}\right)^N \quad (1)$$

(B) 一度でも交換される確率は

$$1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^N \quad (2)$$

となる。

ここで、(A) と (B) の場合に分けてそれぞれの確率を考える。

(A) の場合、 $k = N + 1$ の操作で $N + 1$ の箱の赤玉は $1, \dots, N$ のどれかの箱の中身と交換されるため、すべての操作の完了時点で、 $N + 1$ の箱には赤玉は無い。

したがってこの場合、すべての操作の終了した後、番号 $N + 1$ の箱に赤玉が入っている確率は 0

(B) の場合、 $k = 1, \dots, N$ までの操作で一度でも $N + 1$ との交換があった場合を考える。

初めて $N + 1$ の箱と交換が発生した時の操作が $k = n$ の操作であったとすると $k = n + 1$ の操作の直前ににおいて赤玉は n の箱に位置する。

その後の操作 $k = n + 1, \dots, N$ の時に n の箱はどれかの箱と交換される可能性があるが、その時の操作が $k = l$ の操作 ($n + 1 \leq l \leq N$) であったとすると、赤玉は l の箱に移動する事になる。

しかし、 $l \leq N$ なので赤玉は $N + 1$ の箱に移動する事は無い。

つまり、 $k = 1, 2, \dots, N$ までの操作において、一度でも $N + 1$ の箱から赤玉が移動した場合は $N + 1$ の操作の直前ににおいて、赤玉は $1, 2, \dots, N$ のどれかの箱にあることになる。

この状態で $k = N + 1$ の操作によって、 $N + 1$ の箱に赤玉が入る確率は $\frac{1}{N}$ となる。

よって、すべての操作が完了した段階で赤玉が $N + 1$ の箱に入っている確率は

$k = 1, \dots, N$ までの操作で 1 度でも $N + 1$ と交換が起こる確率 (2) と $k = N + 1$ の操作でその時点で赤玉が入っている $1, \dots, N$ のどれかの箱が $k = N + 1$ の操作によって選ばれる確率

$$\frac{1}{N} \quad (3)$$

の積となり (B) の場合の確率は

$$\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^N\right) \left(\frac{1}{N}\right)$$

となる。

(A) と (B) は排他なので、確率は (A) と (B) の確率の和となる。

したがって、すべての操作が終了した時点で箱 $N + 1$ に赤玉が入っている確率は

$$\underline{\left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^N\right) \left(\frac{1}{N}\right)}$$

となる。