京都大学　 2006 年　入学試験　前期理系数学　問題 4

問題

2 以上の自然数 n に対し，n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ.

解答

n が 2 の場合、$n^2+2=6$ は合成数である。
n が 3 の場合、$n=3$,$n^2+2=11$ ともに素数である。
従って、題意を示すには 3 より大きな自然数について、n または n^2+2 のいずれかは必ず合成数であることを示せばよい。
n を 3 より大きな自然数とする。
n を 3 を法として剰余類に分けると、
m を 2 以上の自然数として
$3m, 3m-2, 3m-1$
に分けられる。
$n=3m$ のとき
m が 2 以上の整数なので、n は合成数
$n=3m-2$ のとき
$n^2+2=(n+1)(n-1)+3=(3m-1)(3m-2-1)+3=(3m-1)(3m-3)+3=3((3m-1)(m-1)+1)$
となり $m \geq 2$ より $3m-1 \geq 1$ かつ $m-1 \geq 1$ だから $(3m-1)(m-1)+1>1$ より
n^2+2 は合成数
同様に $n=3m-1$ のときは
$n^2+2=(n+1)(n-1)+3=3((3m-2)m+1)$
となり $m \geq 2$ より $3m-2 \geq 1$ かつ $m \geq 2$ だから $(3m-2)m+1>1$ より
n^2+2 は合成数

以上より、n を 3 より大きな整数とすると、n または n^2+2 は合成数となる。
よって、2 以上の自然数 n について n と n^2+2 がともに素数となるのは $n=3$ の場合に限る。

証明終了